Partie 1 : Calcul, équations et inéquations.

exo 1

a) $5x+15=0 \Leftrightarrow 5x=-15 \Leftrightarrow x=-\frac{15}{5} \Leftrightarrow x=-3$

$S=\{-3\}$

b) $f(x)=\frac{3x+22}{5x+15}$.

$Df=\{x\in\mathbb{R},\ 5x+15\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R},\ x\neq -3\}$

$Df=]-\infty;-3[\,\cup\,]-3;+\infty[$.

exo 2

a) $3x^2-24x+48=0$ est une équation du 2^{nd} degré

avec $\Delta=b^2-4ac=(-24)^2-4\times3\times48=0$.

Donc l'équation admet une unique solution réelle :

$x_0=\frac{-b}{2a}=-\frac{(-24)}{2\times3}=4$.

$S=\{4\}$

b) $f(x)=\frac{3x+22}{3x^2-24x+48}$.

$Df=\{x\in\mathbb{R},\ 3x^2-24x+48\neq0\}=\{x\in\mathbb{R},\ x\neq4\}$

$Df=]-\infty;4[\,\cup\,]4;+\infty[$

exo 3

a) $-6-10x\geq0 \Leftrightarrow -10x\geq6 \Leftrightarrow x\leq-\frac{6}{10} \Leftrightarrow x\leq-\frac{3}{5}$

$S=]-\infty;-\frac{3}{5}]$

b) $f(x)=\sqrt{-6-10x}$

$Df=\{x\in\mathbb{R},\ -6-10x\geq0\}=]-\infty;-\frac{3}{5}]$

exo 4

a) $-x^2+15x-50\geq0$ est une inéquation du 2^{nd} degré.

$\Delta=b^2-4ac=15^2-4\times(-1)\times(-50)=25>0$.

donc $P: x\mapsto -x^2+15x-50$ admet 2 racines réelles :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=+10$ et $x_2=\frac{-15+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=5$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		5		10		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=[5;10]$

b) $f(x)=\sqrt{-x^2+15x-50}$.

$Df=\{x\in\mathbb{R},\ -x^2+15x-50\geq0\}=[5;10]$

exo 5

a)

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		-1		3		$+\infty$
$5x-15$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-6x-6$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

- $5x-15=0 \Leftrightarrow 5x=15 \Leftrightarrow x=\frac{15}{5} \Leftrightarrow x=3$
- $2x+9=0 \Leftrightarrow 2x=-9 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{2}$
- $-6x-6=0 \Leftrightarrow -6x=6 \Leftrightarrow x=-1$

b) $f(x)=\sqrt{(5x-15)(2x+9)(-6x+6)}$.

$Df=\{x\in\mathbb{R},\ (5x-15)(2x+9)(-6x+6)\geq0\}$

$Df=]-\infty;-\frac{9}{2}]\cup[-1;3]$

exo 6

$\frac{e^{3x+5}(e^{-x+2})^3}{e^{-4}e^{4x}}=\frac{e^{3x+5}e^{-3x+6}}{e^{-4+4x}}=e^{3x+5-3x+6+4-4x}=e^{-4x+15}$

exo 7

a) $e^{-5x+6}\geq e^{2x+20}$

$\Leftrightarrow -5x+6\geq2x+20$ car la fonction exp est st. croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow -5x-2x\geq20-6$

$\Leftrightarrow -7x\geq14$

$\Leftrightarrow x\leq\frac{14}{-7}$

$\Leftrightarrow x\leq-2$

$S=]-\infty;-2]$

b) $(e^x-1)(e^x+4)=0$

$\Leftrightarrow e^x-1=0$ ou $e^x+4=0$

$\Leftrightarrow e^x=1$ ou $e^x=-4$

$\Leftrightarrow e^x=e^0$ ou impossible car pour tout $x\in\mathbb{R}, e^x>0$

$\Leftrightarrow x=0$

$S=\{0\}$

Partie 2 : Fonctions.

ex 8

a) Vraie (en environ $-1,3$; $-0,1$ et $1,2$)

b) Faux (3, en $-1,5$; $0,5$ et $0,9$ environ)

c) Faux (en environ $1,5$)

d) Faux ($\nearrow$ sur $[-1;-0,8]$, $\searrow$ sur $[-0,8;0,8]$, $\nearrow$ sur $[0,8;1]$).

ex 9

a) Vraie ($x \not\to y$)

b) Vraie (une solution sur $[1;2]$ et une sur $[2;10]$).

c) Faux (une sur $[2;10]$)

d) Vraie (en -10, une fois sur $[1;2]$ et une fois sur $[2;10]$)

ex 10.

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 8$

$\to f'(x) = 3\times 4x^3 - 5\times 3x^2 + 2\times 2x - 7\times 1 + 0$

$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 7$.

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.

$\to f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ex 11 $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

a) f est une polynôme de degré 2 donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x - 1$

b) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 2\times 1^2 - 1 + 3 = 4$

et $f'(1) = 4\times 1 - 1 = 3$.

Donc $T : y = 3(x-1) + 4$

$T : y = 3x - 3 + 4$

$T : y = 3x + 1$.

c) oui, c'est cohérent.

ex 12

① $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + 3$.

- f est un polynôme de degré 3 donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{3}\times 3x^2 + 2\times 2x - 4\times 1 + 0$

$f'(x) = -x^2 + 4x - 4$

- f' est un polynôme de degré 2 et $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 0$

Donc f' admet une unique racine réelle :

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\times(-1)} = 2$

- On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de f'	$-$	0	$-$
Variations de f	$\searrow$		

② $f(x) = \frac{2x+1}{-6x+4}$

- On résout : $-6x + 4 = 0 \iff -6x = -4 \iff x = \frac{2}{3}$

donc f est définie et dérivable sur $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[$ et $\left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$

- $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto 2x+1 \\ v : x \mapsto -6x+4 \end{cases}$

u et v affines donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -6$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$f'(x) = \frac{2(-6x+4) - (2x+1)\times(-6)}{(-6x+4)^2} = \frac{-12x + 8 + 12x + 6}{(-6x+4)^2} = \frac{14}{(-6x+4)^2} > 0$

- On en déduit le tableau suivant.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
signe de f'	$+$	‖	$+$
Variations de f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

③ $f(x) = \sqrt{-6-10x}$

- D'après l'ex 3, f est définie sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{5}\right]$ et elle est donc dérivable sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{5}\right[$
- Pour tout $x \in \left]-\infty ; -\frac{3}{5}\right[$, $f = \sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto -6 - 10x$ (et $u'(x) = -10$).

Donc pour tout $x \in \left]-\infty ; -\frac{3}{5}\right[$,

$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-10}{2\sqrt{-6-10x}} = \frac{-5}{\sqrt{-6-10x}} < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$
signe de f'	$-$	‖
Variations de f	$\searrow$	0

④ $f(x) = (-2x+5)e^{-x+3}$

- $f = uv$ avec $u : x \mapsto -2x+5$ affine et $v : x \mapsto e^{-x+3}$ composée de l'exponentielle et d'une fonction affine donc u, v et f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -2$; $v'(x) = -1e^{-x+3}$

et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$= -2e^{-x+3} + (-2x+5)\times(-1e^{-x+3})$

$= e^{-x+3}(-2 + (-2x+5)\times(-1))$

$= e^{-x+3}(-2 + 2x - 5) = e^{-x+3}(2x-7)$

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
e^{-x+3}	$+$		$+$
$2x-7$	$-$	0	$+$
signe de f'	$-$	0	$+$
Variations de f	$\searrow$		$\nearrow$

avec $f(\frac{7}{2})$

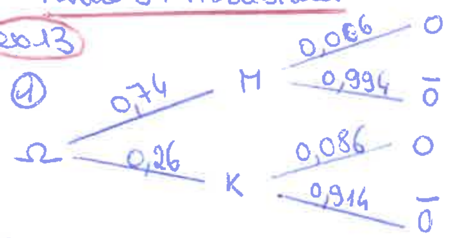
$= (-2\times\frac{7}{2} + 5)e^{-\frac{7}{2}+3}$

$= -2e^{-0,5}$

Partie 3 : Probabilités.

ex 13

①



② $P(K \cap O) = P(K) \times P_K(O) = 0{,}26 \times 0{,}086$

$P(K \cap O) = 0{,}02236$

③ M et K forment une partition de l'univers

On applique donc la formule des probabilités totales :

$P(O) = P(M \cap O) + P(K \cap O)$

$P(O) = P(M) \times P_M(O) + P(K) \times P_K(O)$

$P(O) = 0{,}74 \times 0{,}006 + 0{,}26 \times 0{,}086 = 0{,}0268$

④ On cherche $P_O(K)$.

$P_O(K) = \dfrac{P(O \cap K)}{P(O)} = \dfrac{0{,}02236}{0{,}0268} = 0{,}834328 \approx 0{,}83$

ex 14

a) La somme des probabilités de chaque issue fait 1

Donc $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$

Donc $0{,}26 + 0{,}23 + a + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$

Donc $a = 1 - 0{,}26 - 0{,}23 - 0{,}15 - 0{,}05$

Donc $a = 0{,}31$

b) $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$P(X \geq 2) = 0{,}31 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}51$

c) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$P(X \leq 2) = 0{,}26 + 0{,}23 + 0{,}31 = 0{,}8$

d) $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_5 p_5$

$E(X) = 0 \times 0{,}26 + 1 \times 0{,}23 + 2 \times 0{,}31 + 3 \times 0{,}15 + 4 \times 0{,}05$

$E(X) = 1{,}5$

En moyenne, sur un grand de répétitions, le commercial peut espérer vendre 1,5 pompes à chaleur par semaine.

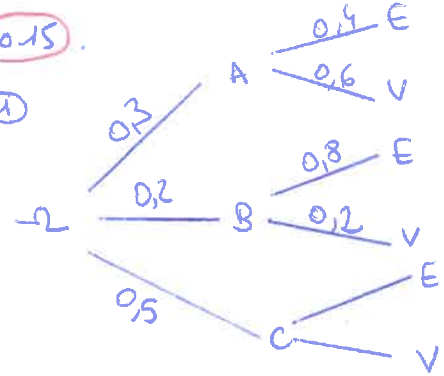
e) $V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_5^2 p_5 - E(X)^2$

$V(X) = 0^2 \times 0{,}26 + 1^2 \times 0{,}23 + \dots + 4^2 \times 0{,}05 - 1{,}5^2$

$V(X) = 1{,}37$.

ex 15.

①



② $P_A(E) = 0{,}4$ et $P_B(V) = 0{,}2$

③ $P(A \cap E) = P(A) \times P_A(E) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

④ A, B et C forment une partition de l'univers

On peut donc appliquer la formule des probabilités totales.

$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)$

Donc $P(C \cap E) = P(E) - P(A \cap E) - P(B \cap E)$

$P(C \cap E) = 0{,}7 - 0{,}12 - P(B) \times P_B(E)$

$P(C \cap E) = 0{,}7 - 0{,}12 - 0{,}2 \times 0{,}8$

$P(C \cap E) = 0{,}42$

⑤ On cherche $P_C(E)$.

$P_C(E) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}5} = 0{,}84$

⑥ A-t-on $P(E \cap C) = P(E) \times P(C)$?

$P(E \cap C) = 0{,}42$

Et $P(E) \times P(C) = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35$

Donc $P(E \cap C) \neq P(E) \times P(C)$

Donc E et C ne sont pas indépendants.

Partie 4 : Suites Numériques

ex 16 $u_n = 3n^2 - 1$.

$u_0 = 3\times0^2 - 1 = -1$

$u_1 = 3\times1^2 - 1 = 2$

$u_2 = 3\times2^2 - 1 = 11$

$u_3 = 3\times3^2 - 1 = 26$

ex 17. $u_n = 3n^2 - 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 1$

$u_{n+1} = 3(n^2+2n+1) - 1$

$u_{n+1} = 3n^2+6n+3-1$

$u_{n+1} = 3n^2+6n+2$

ex 18. $u_n = (3n+1)^2+2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = (3n+1)^2+2$

$u_n = (9n^2+6n+1)+2$

$u_n = 9n^2+6n+3$

$u_n = 3(3n^2+2n+1)$

Or, $(3n^2+2n+1) \in \mathbb{Z}$ (entier)

Donc u_n est un multiple de 3 (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

ex 19 $u_0 = 2$; $u_1 = 8$; $u_2 = 17$; $u_3 = 19$ et $u_4 = 100$.

a) Faux car $u_0 < u_1$.

b) Vrai car $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$.

c) Faux. On ne sait pas pour $n \geq 5$.

ex 20 $u_n = 2n+5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = [2(n+1)+5] - [2n+5]$

$= 2n+2+5-2n-5$

$= 2$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$

donc (u_n) strictement croissante.

ex 21 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

$u_0 = 1$

$u_1 = 2u_0 + 1 = 2\times1+1 = 3$.

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2\times3+1 = 7$

$u_3 = 2u_2 + 1 = 2\times7+1 = 15$.

ex 22 $u_0 = 12$ et $r = 5$

a) (u_n) est arithmétique de raison 5 et de 1er terme $u_0 = 12$. Donc :

$u_0 = 12 \xrightarrow{+5} u_1 = 17 \xrightarrow{+5} u_2 = 22 \xrightarrow{+5} u_3 = 27$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$

$u_n = 12 + 5n$

ex 23

a) (u_n) géométrique de raison 3 et $u_0 = 2$.

Donc : $u_0 = 2 \xrightarrow{\times3} u_1 = 6 \xrightarrow{\times3} u_2 = 18 \xrightarrow{\times3} u_3 = 54$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 2\times3^n$

ex 24

Algorithme	Valeur de I	Valeur de V
$V \leftarrow 1$	—	1
Pour I allant de 1 à 3	I = 1	$2\times1+1=3$
$V \leftarrow 2\times V+1$	I = 2	$2\times3+1=7$
Fin Pour	I = 3	$2\times7+1=15$
Afficher V	Affichage : 15.	

ex 25. $u_0 = 115$.

1) $u_1 = \frac{40}{100}\times115+120 = 166$ et $u_2 = \frac{40}{100}\times166+120 = 186{,}4 \approx 186$ (précision à l'unité).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{40}{100}\times u_n + 120 = 0{,}4\,u_n + 120$.

3) Le 2ème algorithme convient (le 1er réinitialise chaque boucle avec la valeur 115)

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 200$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 200$

$= 0{,}4u_n + 120 - 200$

$= 0{,}4u_n - 80$

$= 0{,}4(v_n+200) - 80$

$= 0{,}4v_n + 80 - 80$

$= 0{,}4v_n$

et $v_0 = u_0 - 200$

$v_0 = 115 - 200$

$v_0 = -85$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4 et $v_0 = -85$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -85\times0{,}4^n$

6) Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 200$ donc $u_n = 200 - 85\times0{,}4^n$

7) A la calculatrice, on conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 200$ donc oui, c'est suffisant

↳ ou alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $85\times0{,}4^n > 0$

donc $200 - 85\times0{,}4^n < 200$

donc $u_n < 200$

8)

```
U = 115
N = 0
Tant que U ≤ 180
    U = 0,4×U+120
    N = N+1
Afficher N.
```

9) Il s'agit de calculer $S = 20\times(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)$

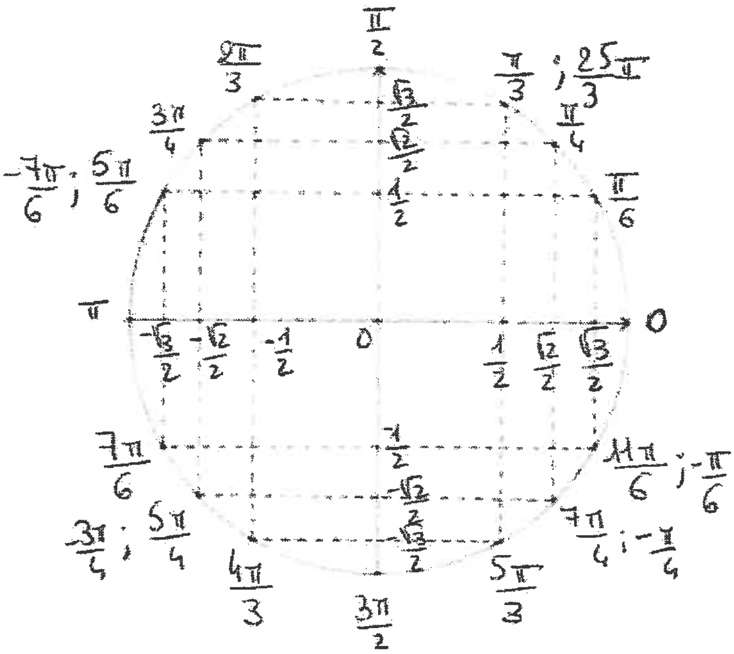
$S \approx 20(115+166+186+194+198+199) \approx 21\,160$ €

Partie 5 : Géométrie (trigonométrie, droites, produit scalaire)

Trigonométrie (Chapitre 5 : Trigonométrie)

Exercice 26 :

I. **Compléter le cercle trigonométrique.**



II. **Déterminer les valeurs suivantes :**

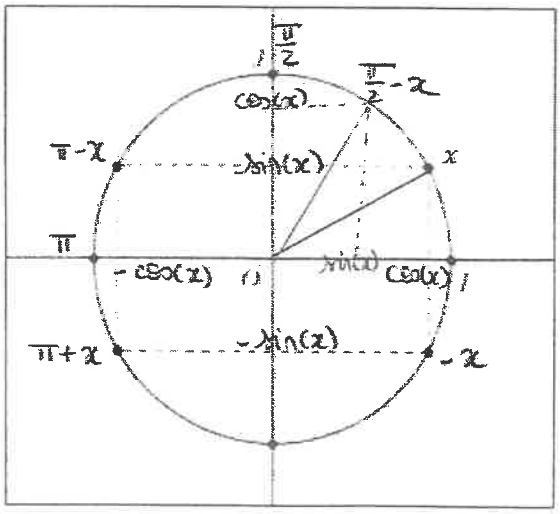
1. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
2. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
5. $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
7. $\cos(\pi) = -1$
8. $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

III. **Résoudre les équations suivantes, en utilisant le cercle trigonométrique :**

1. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$ $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$
2. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$ $S = \left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$
3. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$
4. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; 0]$ $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}$
5. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; 2\pi]$ $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$
6. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$ $S = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$
7. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; \pi]$ $S = \emptyset$
8. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right\}$
9. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; 0]$ $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right\}$
10. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; 2\pi]$ $S = \{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7}{4}$

IV. **Simplifier, à l'aide du schéma ci-contre :**

1. $\cos(-x) = \cos(x)$
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$
3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
4. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
5. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
6. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
8. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$



Partie 5: Géométrie (droites, produit scalaire)

Ex27

I (d) : $3x-2y+4=0$.

① $3x_A-2y_A+4=3\times(-1)-2\times(-2)+4=5\neq 0$ donc $A\notin(d)$

② $D(6;y_D)\in(d)$ ssi $3\times 6-2y_D+4=0$
ssi $-2y_D=-22$
ssi $y_D=11$ donc $D(6;11)$

③ B appartient à l'axe des abscisses donc $y_B=0$.
$B(x_B;0)\in(d)$ ssi $3x_B-2\times 0+4=0$
ssi $x_B=-\frac{4}{3}$ donc $B(-\frac{4}{3};0)$

④ C appartient à l'axe des ordonnées donc $x_C=0$
$C(0;y_C)\in(d)$ ssi $3\times 0-2y_C+4=0$
ssi $y_C=2$ donc $C(0;2)$

⑤ (d) : $ax+by+c=0$ avec $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=4 \end{cases}$ donc
un vecteur directeur est $\vec{u}(-b;a)$ donc $\vec{u}(2;3)$

⑥ et un vecteur normal est $\vec{n}(a;b)$ soit $\vec{n}(3;-2)$

II (d') : $y=5x+3$.

⑦ $5x_A+3=5\times(-1)+3=-2=y_A$ donc $A(-1;-2)\in(d')$

⑧ $D'(6;y_{D'})\in(d')$ ssi $y_{D'}=5\times 6+3$
ssi $y_{D'}=33$ donc $D'(6;33)$

⑨ B' appartient à l'axe des abscisses donc $y_{B'}=0$
$B'(x_{B'};0)\in(d')$ ssi $0=5\times x_{B'}+3$
ssi $x_{B'}=-\frac{3}{5}$ donc $B'(-\frac{3}{5};0)$

⑩ C' appartient à l'axe des ordonnées donc $x_{C'}=0$
$C'(0;y_{C'})\in(d')$ ssi $y_{C'}=5\times 0+3$
ssi $y_{C'}=3$ donc $C'(0;3)$

⑪ (d') : $y=mx+p$ avec $m=5$ et $p=3$
Donc un vecteur directeur est $\vec{v}(1;m)$ soit $\vec{v}(1;5)$

⑫ (d') : $y=5x+3$ donc (d') : $5x-y+3=0$
donc $\vec{n'}(a;b)$ avec $a=5$; $b=-1$ et $c=3$ est un vecteur normal de (d') donc $\vec{n'}(5;-1)$

III

⑬ (d) admet $\vec{u}(2;3)$ comme vecteur directeur
et (d') admet $\vec{v}(1;5)$ " " "
On applique le critère de colinéarité à $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{1}{5}$:
$2\times 5-3\times 1=7\neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires
donc (d) et (d') ne sont pas parallèles mais sécantes.

⑭ $I(x;y)\in(d)\cap(d') \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+4=0 \\ y=5x+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2(5x+3)+4=0 \\ y=5x+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-10x-6+4=0 \\ y=5x+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x=2 \\ y=5x+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{7} \\ y=5\times(-\frac{2}{7})+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{7} \\ y=\frac{11}{7} \end{cases}$ donc $I(-\frac{2}{7};\frac{11}{7})$

IV $A(-2;-3)$ et $B(6;11)$

⑮ $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}=\vec{AB}\begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 11-(-3) \end{pmatrix}=\vec{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$

$M(x;y)\in(AB)\Leftrightarrow \vec{AB}\binom{8}{14}$ et $\vec{AM}\binom{x+2}{y+3}$ colinéaires

$\Leftrightarrow 8(y+3)-14(x+2)=0$
$\Leftrightarrow 8y+24-14x-28=0$
$\Leftrightarrow -14x+8y-4=0$
$\Leftrightarrow -7x+4y-2=0$.

donc (AB) : $-7x+4y-2=0$

⑯ $-7x+4y-2=0 \Leftrightarrow 4y=7x+2$
$\Leftrightarrow y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$.

donc (AB) : $y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$

⑰ On peut utiliser la même méthode que la Q14 mais voyons une autre méthode :
$J(x;y)\in(d)\cap(AB)$

ssi $\begin{cases} 3x-2y+4=0 \\ -7x+4y-2=0 \end{cases}$ $(\times 2)$

ssi $\begin{cases} 6x-4y+8=0 & (1) \\ -7x+4y-2=0 & (2) \end{cases}$

ssi $\begin{cases} (6x-4y+8)+(-7x+4y-2)=0 & (1)+(2) \\ -7x+4y-2=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} -x+6=0 \\ 4y=7x+2 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{7}{4}\times 6+\frac{2}{4} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x=6 \\ y=11 \end{cases}$ donc $J(6;11)$

⑱
$M(x;y)\in(d')$
$\Leftrightarrow \vec{CM}\binom{x-1}{y+4}$ et $\vec{AB}\binom{8}{14}$ orthogonaux
$\Leftrightarrow \vec{CM}\binom{x-1}{y+4}\cdot\vec{AB}\binom{8}{14}=0$
$\Leftrightarrow (x-1)\times 8+(y+4)\times 14=0$
$\Leftrightarrow 8x-8+14y+56=0$
$\Leftrightarrow 8x+14y+48=0$
$\Leftrightarrow 4x+7y+24=0$.

donc (d') : $4x+7y+24=0$

Partie 5 : Géométrie

Ex28 $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

$= 5 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= 5 \times 2 \times \frac{1}{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$

Ex29 ABCD est un rectangle donc $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ donc $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = 0$

Ex30 $A(1;0)$, $B(3;6)$ et $C(-1;2)$

a) $\vec{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \vec{AC}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \vec{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

et $\vec{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \vec{BC}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \vec{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AC}\cdot\vec{BC} = xx' + yy' = -2\times(-4) + 2\times(-4) = 0$

c) $\vec{AC}\cdot\vec{BC} = 0$ donc $\vec{AC} \perp \vec{BC}$ (orthogonaux)

donc $(AC) \perp (BC)$ (perpendiculaires)

Ex31 $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -4\times 3 + 7\times(-5) = -47$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-4)^2+7^2} = \sqrt{65}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

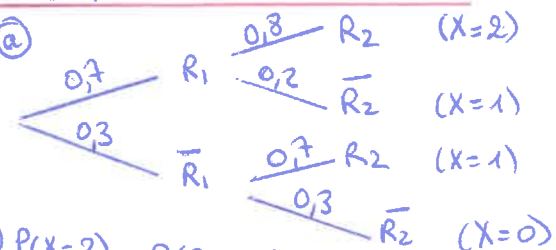
donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{-47}{\sqrt{65}\sqrt{34}}$

c) donc $(\vec{u},\vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{-47}{\sqrt{65}\sqrt{34}}\right)$

$(\vec{u},\vec{v}) \simeq 178,8°$

Pb 32 : Probabilités et Suites.

1) a)



b) $P(X=2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)$

$= 0,7\times 0,8 = 0,56$

$P(X=1) = P(R_1\cap\overline{R_2}) + P(\overline{R_1}\cap R_2)$

$= P(R_1)\times P_{R_1}(\overline{R_2}) + P(\overline{R_1})\times P_{\overline{R_1}}(R_2)$

$= 0,7\times 0,2 + 0,3\times 0,7 = 0,35$

$P(X=0) = P(\overline{R_1}\cap\overline{R_2}) = P(\overline{R_1})\times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})$

$= 0,3\times 0,3 = 0,09$

$X = x_i$	0	1	2	total
$P(X=x_i)$	0,09	0,35	0,56	1

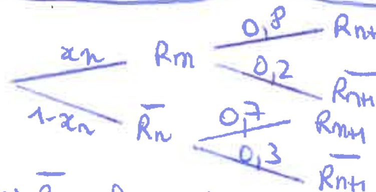
c) $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$

$E(X) = 0\times 0,09 + 1\times 0,35 + 2\times 0,56$

$E(X) = 1,47$

2a) $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0,7$.

2b)



R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers

On peut donc appliquer la formule des probabilités totales et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$x_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n}\cap R_{n+1})$

$= P(R_n)\times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})\times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$

$= x_n \times 0,8 + (1-x_n)\times 0,7$

$= 0,8x_n + 0,7 - 0,7x_n$

$x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$

3) $u_n = x_n - \frac{7}{9}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_{n+1} = x_{n+1} - \frac{7}{9}$

$= 0,1x_n + 0,7 - \frac{7}{9}$

$= 0,1\left(u_n + \frac{7}{9}\right) + \frac{7}{10} - \frac{7}{9}$

$= 0,1u_n + \frac{0,7}{9} - \frac{7}{90}$

$u_{n+1} = 0,1\,u_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 0,1$ et de 1er terme $u_1 = x_1 - \frac{7}{9}$

$= 0,7 - \frac{7}{9} = \frac{-7}{90}$

b) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ (⚠ formule au rang 1)

$u_n = -\frac{7}{90}\times 0,1^{n-1}$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n + \frac{7}{9}$

Donc $x_n = -\frac{7}{90}\times 0,1^{n-1} + \frac{7}{9}$

c) À la calculatrice, on conjecture :

$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{7}{9}$.

---

ex33 Mathématiques Expertes

a) $A = (3-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3}) = -6+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3 = -9+5\sqrt{3}$

b) $B = (1-2\sqrt{5})^2 = 1-4\sqrt{5}+4\times 5 = 21-4\sqrt{5}$

c) $C = (2-3\sqrt{2})(2+3\sqrt{2}) = 2^2-(3\sqrt{2})^2 = 4-18 = -14$

---

ex34

a) $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 3^2-\sqrt{2}^2 = 9-2 = 7$.

b) $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$

c) $\frac{4}{5-\sqrt{7}} = \frac{4(5+\sqrt{7})}{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})} = \frac{4(5+\sqrt{7})}{5^2-\sqrt{7}^2} = \frac{4(5+\sqrt{7})}{18} = \frac{2(5+\sqrt{7})}{9}$

$= \frac{10}{9} + \frac{2\sqrt{7}}{9}$