Lycée L'Agora de Puteaux, 1ères G

Préparer sa rentrée en Terminale
Mathématiques

Le dossier suivant permet de reprendre l'ensemble des points du programme de Mathématiques de Première G afin de combler les éventuelles lacunes avant la rentrée de Terminale. Les résumés de cours de ce document ne sont pas exhaustifs : il faut avoir le réflexe de reprendre le cours de l'année si nécessaire.
L'ensemble de ces exercices doivent être maitrisés afin d'aborder sereinement l'année de Terminale, les pages 9 à 12 n'étant cependant pas utiles pour les élèves poursuivant seulement en maths complémentaires.
Des erreurs peuvent s'être glissées : n'hésitez pas à nous les signaler via l'ENT.

Partie 1 : Calcul, équations et inéquations

Rappels de cours : Vous retrouverez si besoin les formules du Second Degré à la page 3, 3ème cas.
Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif p, on a : $\boldsymbol{e^x e^y = e^{x+y}}$ **;** $\boldsymbol{\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}}$ **et** $\boldsymbol{(e^x)^p = e^{x\times p}}$
On a aussi : $e^x = e^y$ ssi $x = y$ et $e^x < e^y$ ssi $x < y$.

Exercice 1 : Résoudre une équation du premier degré.
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $5x + 15 = 0$.
b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x+22}{5x+15}$. En déduire son ensemble de définition.

Exercice 2 : Résoudre une équation du second degré.
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation du second degré : $3x^2 - 24x + 48 = 0$, à l'aide du discriminant.
b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x+22}{3x^2-24x+48}$. En déduire son ensemble de définition.

Exercice 3 : Résoudre une inéquation du premier degré.
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-6 - 10x \geq 0$.
b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{-6-10x}$. En déduire son ensemble de définition.

Exercice 4 : Résoudre une inéquation du second degré.
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation du second degré : $-x^2 + 15x - 50 \geq 0$, à l'aide du discriminant.
b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 15x - 50}$. En déduire son ensemble de définition.

Exercice 5 : Résoudre une inéquation de degré supérieur.
a) Construire sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes du produit : $(5x - 15) \times (2x + 9) \times (-6x - 6)$.
b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{(5x-15) \times (2x+9) \times (-6x-6)}$.
En déduire son ensemble de définition.

Exercice 6 : Simplifier une expression avec une exponentielle.
Simplifier : $\frac{e^{3x+5}\left(e^{-x+2}\right)^3}{e^{-4}e^{4x}}$

Exercice 7 : Résoudre une équation ou une inéquation avec des exponentielles.
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{-5x+6} \geq e^{2x+20}$.
b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(e^x - 1)(e^x + 4) = 0$

Partie 2 : Fonctions

Rappels de cours :
Les chapitres correspondants sont les chapitres Second Degré, Dérivation et Exponentielle.
Vous trouverez sur les 3 prochaines pages des rappels de cours non exhaustifs.
N'hésitez pas à réinvestir votre cours si ces rappels n'étaient pas suffisants.

I. Méthode Générale pour étudier une fonction

1. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité

- Les fonctions **polynômes** et la fonction exponentielle sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Si la fonction est **rationnelle** (du type $\frac{u}{v}$ avec u et v des polynômes), il faut chercher les valeurs où v s'annule, c'est-à-dire les valeurs interdites. La fonction est alors définie et dérivable sur chaque intervalle où v ne s'annule pas.

- La fonction **racine carrée** est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. (A adapter pour $\sqrt{u}$, cf application)

2. Calculer la dérivée d'une fonction en appliquant les formules

Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Fonction composée f**	**Fonction dérivée f'**
$\boldsymbol{f(x)=x^n}$ **où n est un entier naturel non nul.**	$\boldsymbol{f'(x)=nx^{n-1}}$	$f(x)=u^n$ où n est un entier naturel non nul.	$f'(x)=n\boldsymbol{u'}u^{n-1}$
$\boldsymbol{f(x)=c}$ **où c est une constante réelle**	$\boldsymbol{f'(x)=0}$		
$f(x)=x$	$f'(x)=1$		
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$f(x)=u^2$	$f'(x)=2\boldsymbol{u'}u$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	$f(x)=u^3$	$f'(x)=3\boldsymbol{u'}u^2$
$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x^n}}$ **où n est un entier naturel non nul.**	$\boldsymbol{f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}}$	$f(x)=\frac{1}{u^n}$ où n est un entier naturel non nul.	$f'(x)=-\frac{n\boldsymbol{u'}}{u^{n+1}}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{\boldsymbol{u'}}{u^2}$
$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$	$\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{\boldsymbol{u'}}{2\sqrt{u}}$
$\boldsymbol{f(x)=e^x}$	$\boldsymbol{f'(x)=e^x}$	$f(x)=e^u$	$f'(x)=\boldsymbol{u'}e^u$

Soient $k\in\mathbb{R}$, et u et v deux fonctions dérivables avec v ne s'annulant pas sur un intervalle I
Alors sur I, on a : $(ku)'=ku'$, $(uv)'=u'\times v+u\times v'$ **et** $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

3. <u>Etudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de f</u>

➢ <u>**1er cas : signes évidents**</u>

x	$-\infty$		$+\infty$
7		$+$	

x	$-\infty$		$+\infty$
e^{-3x+5}		$+$	

x	$-\infty$		$+\infty$
-7		$-$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$	

➢ <u>**2ème cas : signe de $ax+b$**</u>

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé à a	0	Signe de a	

<u>Exemple :</u> Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont on a calculé la dérivée : $f'(x) = e^{5x}\,(5x-14)$

x	$-\infty$		$\frac{14}{5}$		$+\infty$
e^{5x}		$+$		$+$	
$5x-14$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

➢ <u>**3ème cas : signe de ax^2+bx+c**</u>

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4 \times a \times c}$$

- **$\Delta > 0$, 2 racines réelles : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$**

<u>Tableau de signes :</u>

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe opposé à a	0	Signe de a	

- **$\Delta = 0$, 1 racine réelle double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$**

<u>Tableau de signes :</u>

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de a	

- **$\Delta < 0$, pas de racine réelle.**

<u>Tableau de signes :</u>

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	

Exemple : Soit g une fonction dont on a calculé la dérivée : $g'(x) = \frac{x^2-3x-10}{x}$

Signe de $x^2 - 3x - 10$:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0.$

Le polynôme admet deux racines réelles : $\boldsymbol{x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{49}}{2\times1} = -2}$ **et** $\boldsymbol{x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{49}}{2\times1} = 5}$

x	$-\infty$		-2		0		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
g		↘		↗	‖	↘		↗	

II. Compléments

1. Equation d'une tangente

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{T_a : y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$$

2. Lecture graphique

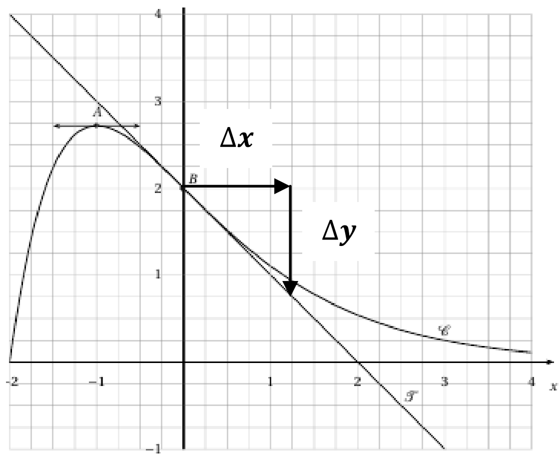
$f(-1) = 2{,}75$ et $f(0) = 2$

$f'(-1) = 0$ (tangente horizontale)

$f'(0) = -1$ (coefficient directeur de la tangente en B)

Equation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 :
$\boldsymbol{T_0 : y = -x + 2}$

Lecture du coefficient directeur : $\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$



3. Coût moyen , coût marginal, bénéfice et unités

Soit $C(x)$ le coût total et $R(x)$ les recettes pour x objets.
Alors le **bénéfice** B est défini par $\boldsymbol{B(x) = R(x) - C(x)}$
Le c**oût moyen** est défini par $\boldsymbol{C_M(x) = \frac{C(x)}{x}}$ et le **coût marginal** par $\boldsymbol{C_m(x) = C(x+1) - C(x)}$

Dans les exercices, il faut être bien vigilant aux unités données dans l'énoncé.
Il est courant que la variable x représente, par exemple, un nombre d'articles, en **centaines d'articles,** ou un prix, en **milliers d'euros**. Il faut alors penser à en tenir compte dans les réponses.

Exercice 8 (Seconde) : **Lire graphiquement des informations.**

On a tracé ci-contre la représentation graphique d'une fonction f.

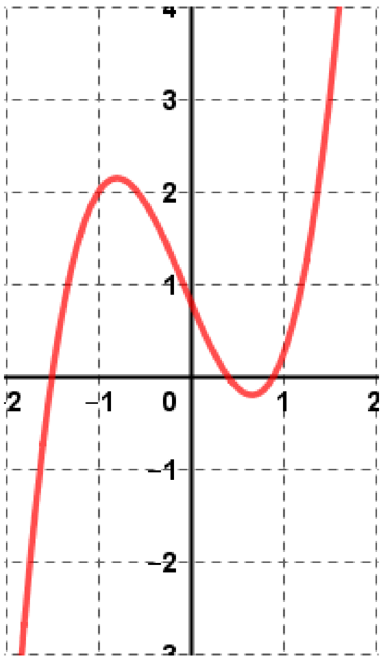
Dire si chacune des phrases suivantes est vraie ou fausse :

a) 1 a trois antécédents par f ;

b) l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions ;

c) l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution ;

d) la fonction f est monotone sur $[-1\,;1]$.



Exercice 9 (Seconde) : **Exploiter un tableau de variations.**

Soit f une fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-10		1		2		10
var de f	0	↗	7	↘	-5	↗	9

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

a) la fonction f est strictement monotone sur $[1\,;2]$;

b) l'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur $[-10\,;10]$;

c) 8 a exactement deux antécédents sur $[-10\,;10]$;

d) la fonction f s'annule 3 fois sur $[-10\,;10]$.

Exercice 10 : **Déterminer l'expression de la fonction dérivée (« calculer » la dérivée).**

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$. Aucune justification n'est attendue, ni simplification du résultat.

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 8$; **b)** $(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.

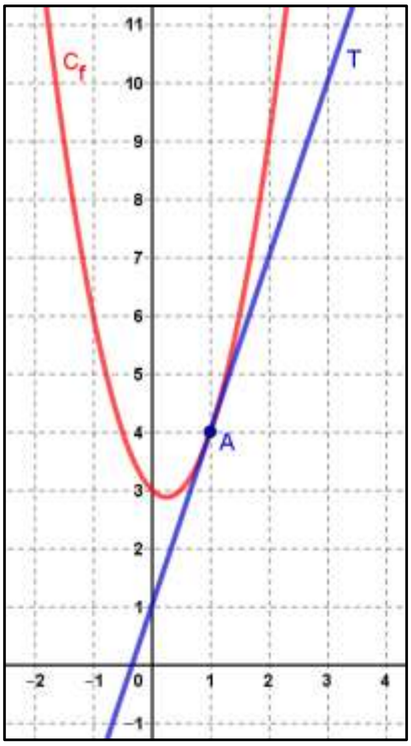
Exercice 11 : **Connaître la formule de l'équation réduite de la tangente.**

On a représenté ci-contre la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$, ainsi que la tangente T à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 1.

a) Calculer $f'(x)$.

b) A l'aide de la formule du cours ($T : y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$), déterminer l'équation réduite de la tangente T (au point d'abscisse 1).

c) Vérifier que vous avez obtenu le bon coefficient directeur et la bonne ordonnée à l'origine à l'aide de lectures graphiques sur le tracé ci-contre.



Exercice 12 : **Déterminer les variations d'une fonction.**

Dans les 4 cas suivants, étudier les variations de f. On donnera les ensembles de définition et de dérivabilité de f, une expression de $f'(x)$, le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

1. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + 3$.

2. $f(x) = \frac{2x+1}{-6x+4}$

3. $f(x) = \sqrt{-6 - 10x}$ (On pourra reprendre le résultat de l'exercice 3 de la partie 1 pour l'ensemble de définition de f)

4. $f(x) = (-2x + 5)e^{-x+3}$.

Partie 3 : Probabilités

Rappels de cours des Chapitres Probabilité Conditionnelle et Variables Aléatoires :

La probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $P_A(B)$ et vaut $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$ et $V(X) = {x_1}^2p_1 + {x_2}^2p_2 + \ldots + {x_n}^2p_n - E(X)^2$ (Formule de Koenig-Huygens)

Exercice 13 : Utiliser un arbre pondéré. Déterminer une probabilité conditionnelle (A-G juin 2014)

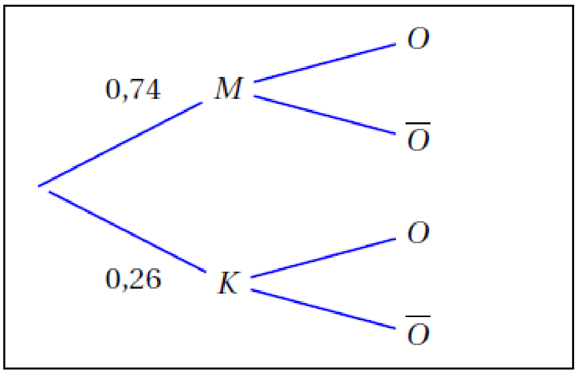
D'après une étude récente, il y a 216 762 médecins en France métropolitaine parmi lesquels 0,6% pratiquent l'ostéopathie et on compte 75 164 kinésithérapeutes parmi lesquels 8,6% pratiquent l'ostéopathie. On choisit une personne au hasard parmi les médecins et les kinésithérapeutes.

On note les événements suivants :

M: « la personne choisie est médecin »

K: « la personne choisie est kinésithérapeute »

O: « la personne choisie pratique l'ostéopathie»



1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Calculer $p(K \cap O)$.
3. Montrer que $p(O) = 0{,}0268$. (N'oubliez de mentionner la formule des probabilités totales)
4. Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories. Quelle est la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute ? Donner le résultat arrondi au centième.

Exercice 14 : Utiliser la loi d'une variable aléatoire. Déterminer son espérance et sa variance.

Avant la canicule, un commercial vendait entre 0 et 4 pompes à chaleur d'un modèle en une semaine.

Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de pompes à chaleur vendues.

X suit la loi de probabilité indiquée ci-contre.

Nombre k de pompes à chaleur vendues	0	1	2	3	4
$\mathbf{P(X = k)}$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

a) Déterminer la valeur de a, la probabilité de vendre exactement deux pompes à chaleur en une semaine.

b) Déterminer la probabilité de vendre au moins deux pompes à chaleur en une semaine.

c) Déterminer la probabilité de vendre au plus deux pompes à chaleur en une semaine.

d) Calculer l'espérance mathématique de X par le calcul. Interpréter le résultat.

e) Calculer la variance de X par le calcul.

Exercice 15 : Problème (d'après ES Amérique du Sud novembre 2012)

Pierre pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V. Chaque fois que Pierre va courir, il choisir un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V). Pierre va courir aujourd'hui. On considère les événements suivants : A: « Pierre choisit le parcours A », B: « Pierre choisit le parcours B », C: « Pierre choisit le parcours C », E: « Pierre fait une séance d'endurance » et V: « Pierre fait une séance de vitesse ». On sait que :

- Pierre choisir le parcours A dans 30% des cas et le parcours B dans 20% des cas.
- Si Pierre choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40% des cas.
- Si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 80% des cas.

1. Faire un arbre pondéré décrivant la situation ci-dessus.
2. Donner la valeur de $p_A(E)$ puis celle de $p_B(V)$.
3. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours A et une séance d'endurance.
4. On sait que $p(E) = 0{,}7$. Montrer que $p(E \cap C) = 0{,}42$.
5. On sait que Pierre a choisi le parcours C.
   Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?
6. Les événements E et C sont-ils indépendants ? (Rappel : càd a-t-on $P(E \cap C) = P(E) \times P(C)$?)

Partie 4 : Suites Numériques

Rappels de cours (Chapitres Suites numériques, arithmétiques et géométriques :

➔ Pour étudier les variations d'une suite, on étudie, pour tout entier naturel , le signe de $u_{n+1} - u_n$.

➔ Suites arithmétiques et géométriques : tableau récapitulatif :

Suites	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition par récurrence	On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$ Le réel r s'appelle la **raison** de la suite arithmétique.	On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$ Le réel q s'appelle la **raison** de la suite arithmétique.
Expression explicite en fonction de n	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$ Cas particuliers : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$ **(et** $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$ **)**	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times \boldsymbol{q^{n-p}}$ Cas particuliers : $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ **(et** $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ **)**
Sens de Variations	Si $r > 0$, la suite est croissante. Si $r < 0$, la suite est décroissante. Si $r = 0$, la suite est constante.	On suppose que $q > 0$, et $u_0 > 0$. Si $q < 1$, la suite est décroissante. Si $q > 1$, la suite est croissante. Si $q = 1$, la suite est constante.
Somme de termes consécutifs	$\boldsymbol{S = \dfrac{(1er\ terme + dernier\ terme) \times nb\ de\ termes}{2}}$	$\boldsymbol{S = 1er\ terme\ de\ la\ somme \times \dfrac{1 - q^{nb\ de\ termes}}{1-q}}$

➔ Attention, si la somme est $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, le nombre de termes est $(\boldsymbol{n+1})$.

Exercice 16 : Calculer les termes d'une suite définie par une relation explicite ($\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 - 1$. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

Exercice 17 : Déterminer une expression du « terme suivant ».

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 - 1$. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 18 : Démontrer que tous les termes d'une suite sont des multiples de 3.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = (3n+1)^2 + 2$.

En développant l'expression de u_n, démontrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 3.

Exercice 19 : Emettre une conjecture sur les variations d'une suite.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 2$, $u_1 = 8$, $u_2 = 17$, $u_3 = 19$, $u_4 = 100$.

Dire si chacune des phrases suivantes est vraie ou fausse, en justifiant si la phrase est fausse.

a) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

c) On peut affirmer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 20 : Déterminer les variations d'une suite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 5$.

En calculant $u_{n+1} - u_n$, démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 21 : Calculer les termes d'une suite définie par récurrence ($\boldsymbol{u_{n+1}}$ en fonction de $\boldsymbol{u_n}$)..

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

Déterminer les quatre premiers termes de la suite.

Exercice 22 : Manipuler une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme : $u_0 = 12$ et de raison $r = 5$. Déterminer :

a) ses quatre premiers termes ; **b)** sa formule de récurrence ; **c)** sa formule du « terme général ».

Exercice 23 : Manipuler une suite géométrique.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme : $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Déterminer :

a) ses quatre premiers termes ; **b)** sa formule de récurrence ; **c)** sa formule du « terme général ».

Exercice 24 : Ecrire un algorithme calculant les termes consécutifs d'une suite définie par récurrence.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}.$$

On considère l'algorithme ci-contre. Compléter le tableau ci-contre en indiquant les valeurs prises par les variables, et préciser quel est le terme que l'algorithme a permis d'afficher « en sortie ».

Algorithme	Valeur de I	Valeur de V
$\boldsymbol{V} \leftarrow 1$	/	…………………
Pour $\boldsymbol{I}$ allant de 1 à 3	$I = 1$	…………………
$\boldsymbol{V} \leftarrow 2 \times \boldsymbol{V} + 1$	…………………	…………………
Fin Pour	…………………	…………………
Afficher $\boldsymbol{V}$	Affichage : …………………………	

Exercice 25 : Problème sur une suite arithmético-géométrique (d'après Pondichéry avril 2014)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris. Le centre ouvre ses portes le 1er janvier 2013 avec 115 oiseaux. Les spécialistes prévoient que 40% des oiseaux présents dans le centre au 1er janvier d'une année restent présents le 1er janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier des années suivantes. La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour 1er terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $(2013 + n)$.

1. Calculer u_1 et u_2. Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme. Parmi les 2 algorithmes proposés, déterminer l'algorithme qui permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier $(2013 + n)$.

```
Saisir N
Pour i allant de 1 à N faire :
        U=115
        U=0,4U+120
Fin Pour
Afficher U
```

```
Saisir N
U=115
Pour i allant de 1 à N faire :
        U=0,4U+120
Fin Pour
Afficher U
```

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,4. Préciser v_0.
5. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
6. En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n = 200 - 85 \times 0{,}4^n$.
7. La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ?
8. On veut savoir quand le nombre d'oiseaux aura dépassé 180. Compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il réponde à la question.

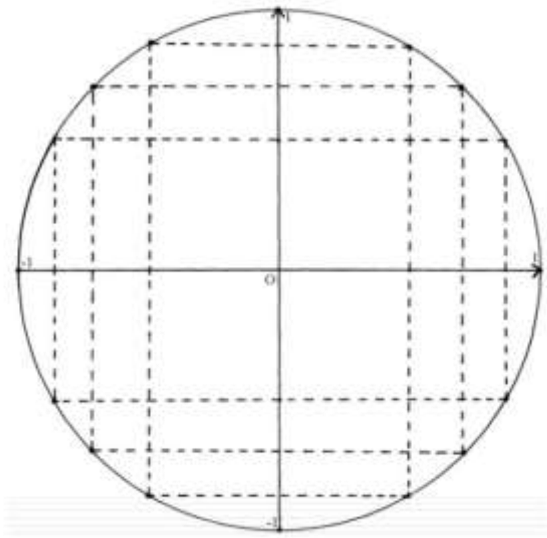
```
U = 115
N = 0
Tant que …………………
        U =…………………
        N =…………
Afficher ….
```

9. Chaque année, le centre touche une subvention de 20€ par oiseau présent au 1er janvier. Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

Partie 5 : Géométrie (trigonométrie, droites, produit scalaire)

Trigonométrie

Exercice 26 :



I. Compléter le cercle trigonométrique.

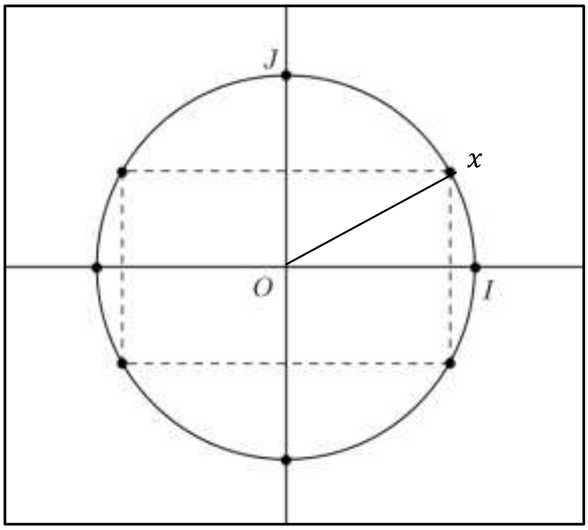
II. Déterminer les valeurs suivantes :

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
4. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
5. $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
7. $\cos(\pi)$
8. $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right)$

III. Résoudre les équations suivantes, en utilisant le cercle trigonométrique :

1. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$
2. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$
3. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$
4. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; 0]$
5. $cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; 2\pi]$
6. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$
7. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; \pi]$
8. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$
9. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; 0]$
10. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; 2\pi]$

IV. Simplifier, à l'aide du schéma ci-contre :



1. $\cos(-x)$
2. $\sin(-x)$

3. $\cos(\pi - x)$
4. $\sin(\pi - x)$

5. $\cos(\pi + x)$
6. $\sin(\pi + x)$

7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
8. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Equations de droites (Chapitres Equations cartésiennes de droites et Produit Scalaire)

Rappels de cours : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- ➔ Le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est défini par : $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})}$.
- ➔ Dans un repère orthonormé, on a la formule suivante : $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=xx'+yy'}$.
- ➔ $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{\vec{u}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **sont orthogonaux** (ce qu'on peut noter $\vec{u}\perp\vec{v}$).
- ➔ Dans le cas où les vecteurs sont **colinéaires de même sens,** on a : $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$.
  Dans le cas où les vecteurs sont **colinéaires de sens contraire,** on a :$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$.
- ➔ Soit (d) une droite d'équation $\boldsymbol{ax+by+c=0}$. Alors (d) admet le vecteur $\boldsymbol{\vec{u}(-b;a)}$ comme vecteur **directeur** et le vecteur $\boldsymbol{\vec{n}(a;b)}$ comme vecteur **normal.**

<u>Méthode pour déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir d'un vecteur directeur :</u>

Soient $\boldsymbol{A(-3;7)}$ et $\boldsymbol{B(8;-1)}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{(AB)}$.

On a $A(-3;7)$ et $B(8;-1)$ donc un vecteur **directeur** de (AB) est : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8-(-3)\\-1-7\end{pmatrix}$ **soit** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix}}$

<u>1ère méthode : avec la colinéarité</u>

$$\begin{aligned}M(x;y)\in(AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-7\end{pmatrix} \text{ colinéaires}\\ &\Leftrightarrow 11(y-7)-(-8)(x+3)=0\\ &\Leftrightarrow 11y-77+8x+24=0\\ &\Leftrightarrow 8x+11y-53=0\end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de la droite (AB) est $\boldsymbol{8x+11y-53=0}$.

<u>2ème méthode : avec la formule du vecteur directeur $\boldsymbol{\vec{u}(-b;a)}$</u>

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) donc (AB): $ax+by+c=0$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc avec $a=-8$ et $b=-11$.
Donc (AB): $-8x-11y+c=0$.

Pour déterminer c, on écrit l'appartenance de A à (AB) (ou B si vous préférez !)
$A(-3;7)\in(AB)$ donc $-8x_A-11y_A+c=0$ donc $-8\times(-3)-11\times7+c=0$ donc $c=53$.

Donc une équation cartésienne de la droite (AB) est $-8x-11y+53=0$ ou encore $\boldsymbol{8x+11y-53=0}$.

<u>On raisonne de la même façon dans le cas d'un vecteur normal :</u>

Soient $\boldsymbol{A(-3;7)}$ et $\boldsymbol{B(8;-1)}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{(d)}$, perpendiculaire à $\boldsymbol{(AB)}$ et passant par $\boldsymbol{A}$.

On a $A(-3;7)$ et $B(8;-1)$ donc un vecteur **normal** de (d) est : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8-(-3)\\-1-7\end{pmatrix}$ **soit** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix}}$

<u>1ère méthode : avec l'orthogonalité</u>

$$\begin{aligned}M(x;y)\in(d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-7\end{pmatrix} \text{ orthogonaux}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-7\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow 11(x+3)+(-8)(y-7)=0\\ &\Leftrightarrow 11x-8y+89=0\end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de la droite (d) est $\boldsymbol{11x-8y+89=0}$.

<u>2ème méthode : avec la formule du vecteur normal $\boldsymbol{\vec{n}(a;b)}$</u>

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (d) donc (d): $ax+by+c=0$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ avec $a=11$ et $b=-8$.
Donc (d): $11x-8y+c=0$.

Pour déterminer c, on écrit l'appartenance de A à (d) (pas B car (d) passe par A seulement !)
$A(-3;7)\in(d)$ donc $11x_A-8y_A+c=0$ donc $11\times(-3)-8\times7+c=0$ donc $c=89$.

Donc une équation cartésienne de la droite (d) est $\boldsymbol{11x-8y+89=0}$

Exercice 27 : Appliquer le cours sur les équations de droites

I. Soit (d) la droite d'équation $3x - 2y + 4 = 0$. (Equation cartésienne)

1. Le point $A(-1 : -2)$ appartient-il à (d) ?
2. Déterminer les coordonnées du point D d'abscisse 6 et appartenant à (d).
3. Déterminer les coordonnées du point B de (d) appartenant à l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées du point C de (d) appartenant à l'axe des ordonnées.
5. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d).
6. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ de (d).

II. Soit $(d^{'})$ la droite d'équation $y = 5x + 3$. (Equation réduite)

7. Le point $A(-1 : -2)$ appartient-il à (d') ?
8. Déterminer les coordonnées du point D' d'abscisse 6 et appartenant à (d').
9. Déterminer les coordonnées du point B' de (d') appartenant à l'axe des abscisses.
10. Déterminer les coordonnées du point C' de (d') appartenant à l'axe des ordonnées.
11. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de (d').
12. Déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n'}$ de (d').

III. Positions Relatives de deux droites

13. Les droites (d) et $(d^{'})$ sont-elles parallèles ? *(On utilisera le critère de colinéarité)*
14. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (d) et $(d^{'})$. *(On résoudra un système)*

IV. Soient $A(-2; -3)$ et $B(6; 11)$.

15. Déterminer une équation cartésienne de (AB).
16. En déduire l'équation réduite de (AB).
17. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de (d) et (AB).
18. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(d^{'})$, perpendiculaire à (AB) et passant par le point $C(1; -4)$. *(On utilisera le produit scalaire).*

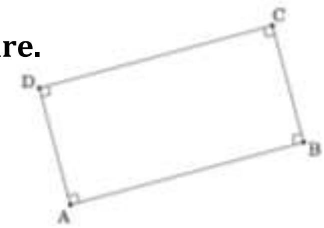
Exercice 28 : Calculer un produit scalaire à l'aide de la formule « avec les normes et le cosinus ».

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\| \vec{u} \| = 5$, $\| \vec{v} \| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

A l'aide d'une formule du cours « avec le cosinus », calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 29 : Faire le lien entre orthogonalité et le résultat d'un produit scalaire.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-contre. Sans faire aucun calcul mais en exploitant une des propriétés du produit scalaire, expliquer pourquoi on a le résultat suivant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.



Exercice 30 : Calculer un produit scalaire à l'aide de coordonnées pour en déduire une orthogonalité.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points : $A(1 ; 0)$, $B(3 ; 6)$, $C(-1 ; 2)$.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) En calculant le produit scalaire avec la formule des coordonnées, prouver que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

c) Que peut-on dire alors des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$? Qu'en déduire sur les droites (AC) et (BC) ?

Exercice 31 : Calculer un produit scalaire à l'aide de coordonnées pour en déduire la mesure d'un angle. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ainsi que les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

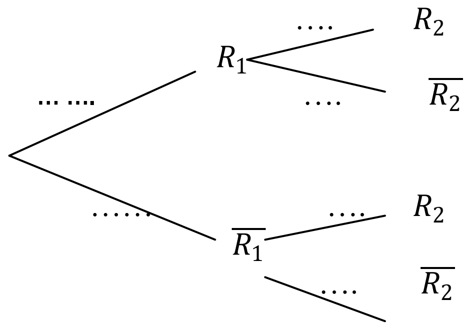
c) En utilisant la formule « avec le cosinus », déterminer la valeur de $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

d) En déduire à la calculatrice la mesure de l'angle formé par $(\vec{u}, \vec{v})$, à 0,1 degré près.

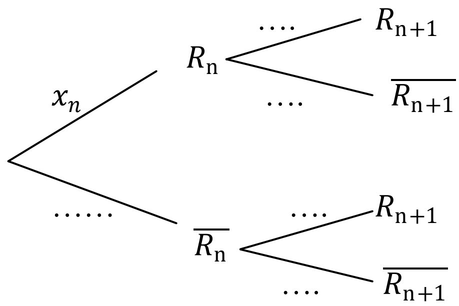
<u>Problème 32 (plus difficile, mêlant Probabilités et Suites Numériques (Am du Sud nov2012))</u>

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services. Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'événement « le joueur réussit le $n-ième$ service » et $\overline{R_n}$ l'événement contraire. Soit x_n la probabilité de R_n. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7. On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Si le joueur réussit le $n-ième$ service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8.
- Si le joueur ne réussit pas le $n-ième$ service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.



1. On s'intéresse aux deux premiers services et on note X la variable aléatoire associée au nombre de services réussis.
   a. Compléter l'arbre ci-contre
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.



2. On s'intéresse maintenant au cas général.
   a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $x_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}7$.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par : $u_n = x_n - \frac{7}{9}$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme u_1.
   b. En déduire une expression de u_n puis de x_n en fonction de n.
   c. Conjecturer la limite de la suite.

Vers les Mathématiques Expertes !

Les 3 parties du programme (Nombres Complexes, Arithmétiques et Matrices) sont des nouveaux domaines des Mathématiques. Il n'y a donc pas réellement d'acquis à maitriser. Les automatismes de calculs suivants pourront cependant aider pour les nombres complexes.

<u>Exercice 33 :</u> Développer des expressions algébriques.
Développer les expressions suivantes :
a) $A = \left(3-\sqrt{3}\right)\times\left(-2+\sqrt{3}\right)$; **b)** $B = \left(1-2\sqrt{5}\right)^2$; **c)** $= \left(2-3\sqrt{2}\right)\times\left(2+3\sqrt{2}\right)$.

<u>Exercice 34 :</u> Utiliser la « quantité conjuguée ».
a) Calculer le produit : $\left(3-\sqrt{2}\right)\times\left(3+\sqrt{2}\right)$.
b) En déduire que : $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$. On pourra compléter le calcul suivant : $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-\sqrt{2}}\times 1 = \frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \ldots$
On dit que $3+\sqrt{2}$ est la quantité conjuguée de $3-\sqrt{2}$.
c) En utilisant la même méthode, montrer que $\frac{4}{5-\sqrt{7}} = \frac{2\left(5+\sqrt{7}\right)}{9} = \frac{10}{9}+\frac{2\sqrt{7}}{9}$.