Exercices bilan : passer de la 2nde à la Première

L'ensemble des exercices ci-dessous aborde l'essentiel du programme de 2nde, en calcul, en fonctions, en géométrie, en algorithmique, et en probabilités/statistique.

***Disclaimer* -** Ce document contient 40 exercices (c'est long). Certains d'entre eux ne sont pas simples, d'autres n'ont pas été spécifiquement abordés pendant l'année (ils ne sont pas au programme de 2nde, mais constituent des compléments pour mieux aborder la 1ere). **Pas de panique : il n'est pas obligatoire de tout maîtriser parfaitement pour la rentrée.** Toutefois, plus savez faire de choses, mieux c'est.

***DEUX CAS POSSIBLES* -** Si l'an prochain, vous êtes en :

***Première Générale avec spécialité maths* -** TOUS les exercices (de 1 à 40) vous seront utiles.

***Première Générale sans spécialité maths, ou Première Technologique* -** Concentrez-vous en priorité sur les exercices suivants :

- Ex1 questions 1,2,3,4
- Ex2 en entier
- Ex3 questions 1 et 4
- Ex8 et Ex9 en entier
- Ex10 questions a,b,d
- Ex11 questions 1 et 2 (sans les inéquations)
- Ex12,13,14,18,21,22 en entier
- Ex23 questions 1 et 2
- Ex25 juste (d_1), questions 1,3,4
- Ex29,30,32,33 en entier

I - CALCUL NUMÉRIQUE ET LITTÉRAL

1 - Développer et réduire une expression algébrique par distributivité simple ou double, ou à l'aide des identités remarquables

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes.

1 $A(x) = (3x-4)(2x-5)+(-4x+2)(-5x-1)$

2 $B(x) = 6-(2x+2)(-4x+3)$

3 $C(x) = (2x+3)^2+(3x-5)^2$

4 $D(x) = 5-(6x-2)^2$

5 $E(x) = (3x-5)(3x+5)-(x+1)^2$

6 $F(x) = (-2x+1)^2-(4-x)(6x-5)$

2 - Factoriser une expression algébrique par un facteur commun, ou à l'aide des identités remarquables

Exercice 2

Factoriser les expressions suivantes.

1 $10x+8$

2 $-4x+4$

3 $8x^2-5x$

4 $(5x+2)(4x-3)+(3x+6)(5x+2)$

5 $(x+1)(3x-3)-(x+1)(2x-4)$

6 $2x(3x-4)-(3x-4)^2+5(3x-4)$

7 $9x^2+6x+1$

8 $4x^2-12x+9$

9 $36x^2-25$

10 $1-49x^2$

11 x^2-3

12 $(3x-5)^2-(2-x)^2$

3 - Calculer avec des fractions et des puissances

Exercice 3

Calculer les nombres suivants en les mettant sous forme d'une fraction irréductible.

1 $A = \dfrac{-6}{25} \times \dfrac{35}{6}$

2 $B = 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}$

3 $C = \dfrac{8}{3} \times (-9) + \left(\dfrac{-1}{-2}\right)^2$

4 $D = \dfrac{\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{8}}{2} + \dfrac{3}{\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{8}}$

5 $E = -2\left(\dfrac{3}{7}-1\right)^2$

Exercice 4

Soit x un nombre réel non nul. Simplifier les expressions suivantes autant que possible.

1 $A = \dfrac{(x^2)^3}{x^3}$

2 $B = \dfrac{x^{-7}}{x^{-2} \times x^4}$

3 $C = \dfrac{x}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^3}$

4 $D = \left(\dfrac{1}{x^{-2}}\right)^{-3}$

4 - Utiliser des valeurs absolues

Exercice 5

1 Calculer les valeurs absolues suivantes :

$$|8| \qquad |-5| \qquad |0.4| \qquad |-\sqrt{3}| \qquad \left|-\frac{4}{3}\right|$$

2 Simplifier l'expression $|\sqrt{2}+5|+|\sqrt{2}-10|$.

3 Vrai ou Faux - Pour tout nombre réel x, on a : $|x+2| = x+2$.

4 Vrai ou Faux - Il existe un nombre réel x tel que : $|x+2| = x+2$.

5 - Calculer avec des racines carrées

Exercice 6

1 Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et b est un entier naturel le plus petit possible.

$$\sqrt{28} \qquad \sqrt{75} \qquad \sqrt{200} \qquad \sqrt{18}$$

2 Écrire les expressions suivantes sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ et c est un entier naturel le plus petit possible.

(*a*) $3\sqrt{2} \times 5\sqrt{6}$
(*b*) $-\sqrt{8} \times 3\sqrt{2} \times (5\sqrt{3})^2$
(*c*) $8\sqrt{2}+5\sqrt{8}-3\sqrt{18}$
(*d*) $(5-3\sqrt{3})(2\sqrt{12}-1)$
(*e*) $(5-2\sqrt{6})^2+(3+\sqrt{6})^2$
(*f*) $(4-3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})$

Exercice 7

1 Simplifier les expressions suivantes quand c'est possible :

$$(\sqrt{10})^2 \qquad (\sqrt{-3})^2 \qquad \sqrt{10^2} \qquad \sqrt{(-3)^2}$$

2 Simplifier les expressions suivantes :

$$\sqrt{(4-5x)^2} \qquad (\sqrt{4-5x})^2 \qquad \sqrt{4x^2}$$

3 Transformer les expressions suivantes afin de rendre les dénominateurs rationnels (sans racines carrées).

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{6}{5\sqrt{3}} \qquad \frac{6}{4-\sqrt{3}} \qquad \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

6 - Résoudre des équations et inéquations

Exercice 8

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(*a*) $3x-5=0$
(*b*) $-2x+8=1$
(*c*) $4x-5=-x-8$
(*d*) $5x-7>0$
(*e*) $-2x+9 \geq 0$
(*f*) $5x-4 \leq 6x+1$

Exercice 9

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(*a*) $(4x-5)(8x+3)=0$
(*b*) $3(2x-7)(-x+3)=0$
(*c*) $-5x^2+2x+13=13$
(*d*) $(-x+3)^2-(4x+5)^2=0$
(*e*) $(4x-3)(-2x-5) \leq 0$
(*f*) $-3(-x+1)(6x-3)<0$

Exercice 10

Résoudre les inéquations et équations suivantes en précisant les valeurs interdites.

(*a*) $\dfrac{4x-1}{3x+1} \geq 0$ (*b*) $\dfrac{x}{1-2x} > 0$ (*c*) $\dfrac{5x-2}{2x-5} = 2$ (*d*) $\dfrac{3-4x}{1-x} = 0$

Exercice 11

Résoudre les équations et inéquations suivantes (sous réserve d'existence des quantités engagées).

1 Avec la fonction carré :

$$x^2=8 \qquad x^2=-3 \qquad x^2=0 \qquad 5x^2-6=0 \qquad 2x^2+3=0$$

$$x^2 \geq 5 \qquad x^2<2 \qquad x^2 \geq -3 \qquad x^2<-1$$

2 Avec la fonction cube :

$$x^3=64 \qquad x^3=-729 \qquad x^3 \leq 1 \qquad x^3>-2$$

3 Avec la fonction racine carrée :

$$\sqrt{x}=7 \qquad \sqrt{x}=-3 \qquad \sqrt{x}<8 \qquad \sqrt{x} \geq 2 \qquad \sqrt{x}>-6 \qquad \sqrt{x} \leq -4$$

4 Avec des valeurs absolues :

$$|x|=4 \qquad |3x+5|=8 \qquad |2x-1|=-2 \qquad |5-2x|=|4x+1|$$

Exercice 12

Résoudre les systèmes linéaires suivants par combinaison ou substitution

$$\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 2x-4y=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+4y=-1 \\ -x+y=12 \end{cases}$$

II - FONCTIONS

1 - Autour des images et antécédents

Exercice 13

1 On considère la fonction $f : x \longmapsto -2x^2 + 3x - 4$.

(a) Déterminer l'image de -4 par f.
(b) Déterminer les antécédents (s'il y en a) de -4 par f.
(c) Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ appartient-il à la courbe de f ?
(d) Calculer $f(\sqrt{3})$.
(e) Donner une équation de la courbe de f.

2 On considère la fonction $g : x \longmapsto -2(x-3)(x+4)$.

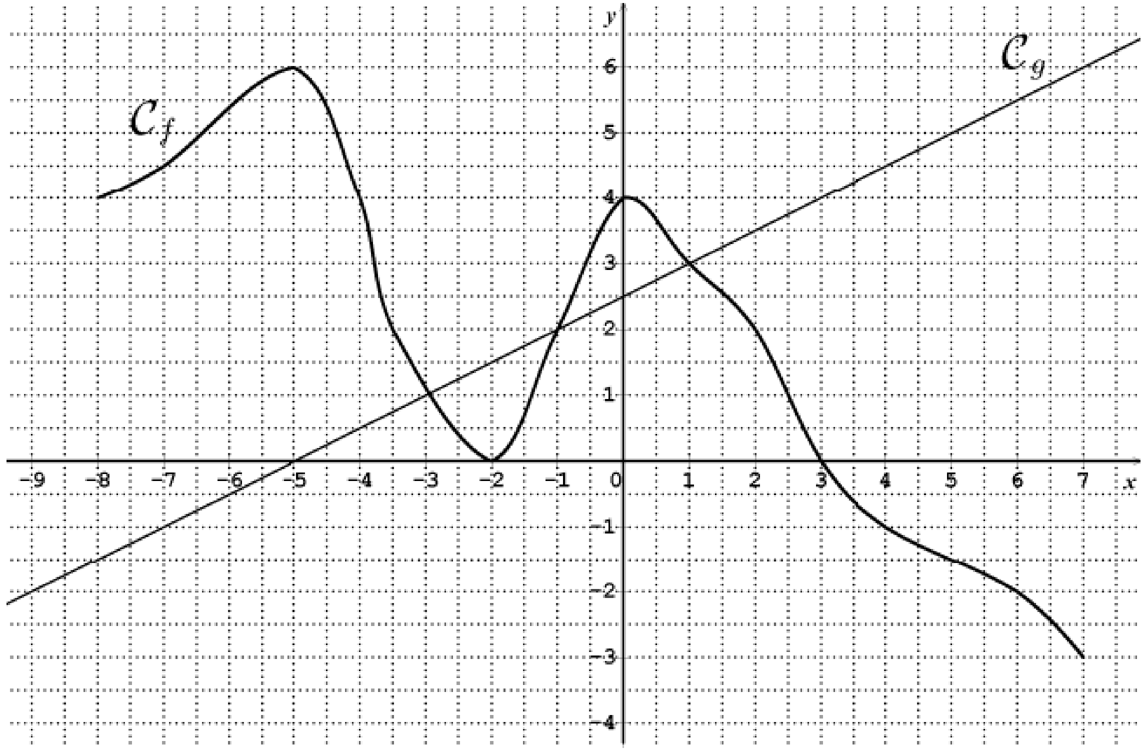
(a) 0 est-il un antécédent de 1 par g ?
(b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe de g avec l'axe des ordonnées.
(c) Déterminer les antécédents (s'il y en a) de 0 par g.
(d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection (s'il y en a) de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
(e) Donner une équation de la courbe de g.
(f) Développer et réduire l'expression $g(x)$.

3 Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. En déduire les coordonnées des points d'intersection (s'il y en a) entre les courbes de f et de g.

2 - Autour de la courbe d'une fonction

Exercice 14

On considère les fonctions f et g représentées ci-contre.



1 Donner le domaine de définition de f. Construire le tableau de variations puis le tableau de signe de f.

2 f admet-elle un maximum (sur son domaine de définition) ? Si oui, donner sa valeur et préciser en quelle(s) valeur(s) il est atteint. Même question pour le minimum.

3 La fonction f est-elle paire ? La fonction f est-elle impaire ?

4 Compléter : $f(\ldots\ldots) = 6$ et $f(6) = \ldots\ldots$.

5 Déterminer l'image de 4 par f. Déterminer les antécédents de 4 par f (s'il y en a).

6 Combien 1 a-t-il d'antécédents ?

7 Résoudre graphiquement (sur le domaine de définition de f) :

$f(x) = 2$ $\quad$ $f(x) = 4$ $\quad$ $f(x) > 4$ $\quad$ $f(x) \leq 4$ $\quad$ $f(x) = g(x)$ $\quad$ $f(x) < g(x)$

3 - Réviser les fonctions usuelles

Exercice 15

On considère quatre fonctions f, g, h, et k définies ci-dessous. Pour chacune de ces fonctions, répondre aux questions suivantes.

$$f : x \longmapsto x^2 \qquad g : x \longmapsto x^3 \qquad h : x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad k : x \longmapsto \sqrt{x}$$

1 Tracer la courbe à main levée. Donner une équation de cette courbe.

2 La fonction est-elle paire ? Est-elle impaire ?

3 Construire le tableau de variations et le tableau de signe.

III - GÉOMÉTRIE

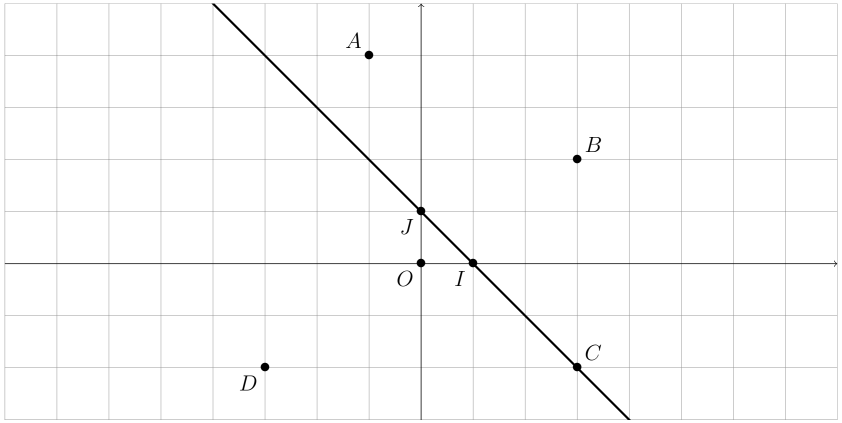
1 - Déterminer des coordonnées

Exercice 16

On se place dans le plan, muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1 Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O, I, J.

2 Construire les projetés orthogonaux des points A, B, C, D sur la droite (IJ). Donner les coordonnées de ces projetés orthogonaux.

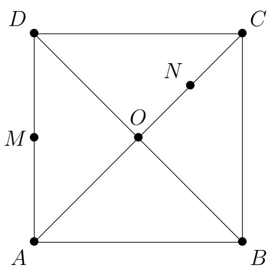


Exercice 17

1 On considère le carré $ABCD$ ci-contre de centre O. On note M le milieu de $[AD]$ et N le milieu de $[OC]$. Donner les coordonnées de tous les points de la figure :

(a) Dans le repère (A, B, D).

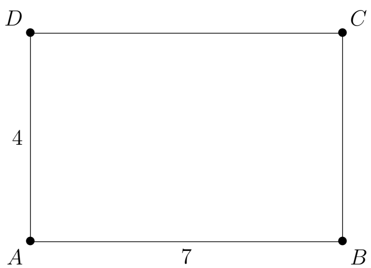
(b) Dans le repère (O, B, C).



2 On considère le rectangle $ABCD$ ci-contre tel que $AB = 7$ et $AD = 4$.

(a) Proposer un repère dans lequel on a $B(7; 0)$ et $D(0; 4)$.

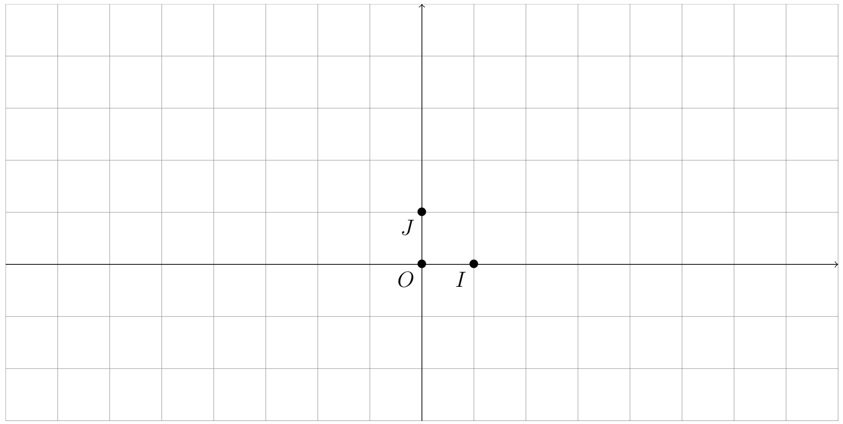
(b) Donner alors les coordonnées du point C.



2 - Appliquer la formule du milieu et la formule de la distance aux triangles et quadrilatères

Exercice 18

On se place dans le plan, muni d'un repère (O, I, J) orthonormé.



1 Placer ci-dessus les points $E(-2; 1)$, $T(-4; 3)$, $F(1; -1)$, $M(5; 0)$, $H(0; 4)$.

2 Montrer que $TFMH$ est un parallélogramme. Ce quadrilatère est-il un losange ? Un rectangle ?

3 Calculer les distances EF, EH, et FH. En déduire que le triangle EFH est rectangle isocèle.

4 Placer $G(3; 2)$. Montrer que $EFGH$ est un carré.

3 - Manipuler les vecteurs sans coordonnées

Exercice 19

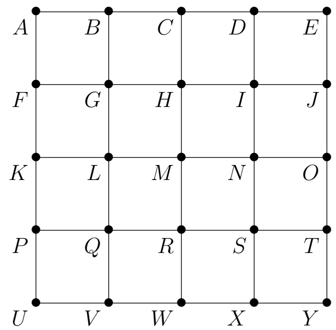
1 Compléter sans justifier.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{P\ldots}$ $\qquad \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{\ldots O}$

$2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{E\ldots}$ $\qquad -3\overrightarrow{SX} = \overrightarrow{S\ldots}$

2 Compléter en détaillant les étapes (penser notamment à la relation de Chasles pour calculer les sommes de vecteurs).

(a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{KR} = \ldots = \overrightarrow{A\ldots}$
(b) $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{IQ} = \ldots = \overrightarrow{D\ldots}$
(c) $\overrightarrow{UK} - \overrightarrow{RP} = \ldots = \overrightarrow{\ldots E}$
(d) $-3\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IN} = \ldots = \overrightarrow{N\ldots}$

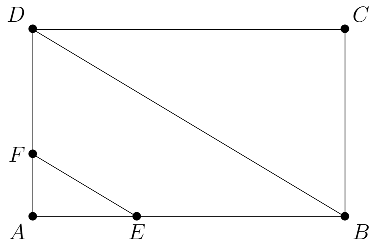


Exercice 20

On considère le rectangle $ABCD$ ci-contre, sur lequel on a placé E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

L'objectif est de démontrer que les droites (EF) et (BD) sont parallèles.



1 En découpant le vecteur $\overrightarrow{BD}$ avec une relation de Chasles bien choisie, montrer que :

$$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

2 En découpant le vecteur $\overrightarrow{EF}$ avec une relation de Chasles bien choisie, montrer que :

$$\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

3 Quelle relation relie les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$?

4 En déduire que $(EF) \mathbin{/\!/} (BD)$.

5 Autre méthode - À l'aide d'un résultat de géométrie collège, montrer que les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

4 - Manipuler les vecteurs avec coordonnées

Exercice 21

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points $A(-3; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(7; -2)$.

1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2 Les points A, B, C sont-ils alignés ?

3 Déterminer les coordonnées du point $D(x_D; y_D)$ tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

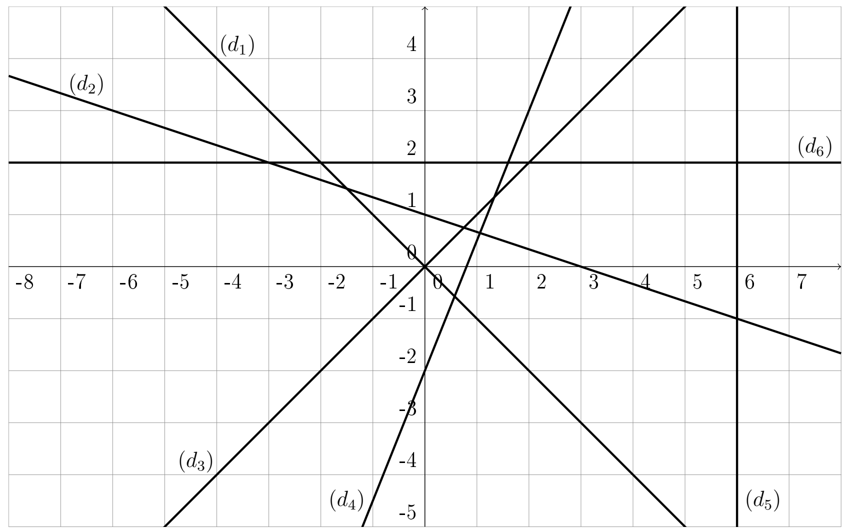
4 Calculer les coordonnées du point $E(x_E; y_E)$ tel que $3\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{0}$.

5 Déterminer les coordonnées du point $M(x; y)$ appartenant à l'axe des abscisses tel que $(AB) \mathbin{/\!/} (CM)$.

5 - Étudier des droites depuis leur équation réduite

Exercice 22

1 Pour chacune des droites ci-dessous, donner sans justifier un vecteur directeur, et déterminer l'équation réduite.



2 On considère les points $A(3; 3)$, $B(5; 3)$, et $C(5; 5)$. Donner sans justifier les équations réduites des droites (AB), (BC), et (AC).

Exercice 23

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites (d) et (d') sont sécantes, et donner si c'est le cas leur point d'intersection.

1 $(d) : y = 3x + 7$ et $(d') : y = 3x - 5$.

2 $(d) : y = 2x - 3$ et $(d') : y = -4x + 3$.

3 $(d) : y = -5x$ et $(d') : y = -1$.

4 $(d) : y = -2x + 4$ et $(d') : x = 2$.

5 $(d) : x = 2$ et $(d') : x = -5$.

6 $(d) : x = 3$ et $(d') : y = 0$.

6 - Manipuler les équations cartésiennes de droites

Exercice 24

Ci-dessous, on donne différentes équations cartésiennes de droites. En "simplifiant" ces équations de droites, que peut-on observer ?

$(d_1) : -30x + 10y + 40 = 0$ $\qquad$ $(d_2) : 10x - 4y - 2 = 0$ $\qquad$ $(d_3) : 6x - 2y - 8 = 0$

$(d_4) : \dfrac{5}{2}x - y - \dfrac{1}{2} = 0$ $\qquad$ $(d_5) : -15x + 6y + 3 = 0$ $\qquad$ $(d_6) : -x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{4}{3} = 0$

Exercice 25

On considère différentes droites définies ci-dessous par une équation cartésienne. Pour chacune des ces droites, répondre aux questions suivantes.

$(d_1) : 4x{-}2y{+}1 = 0$ $(d_2) : -8x{+}6y{+}3 = 0$ $(d_3) : 5y{+}3 = 0$ $(d_4) : -4x{+}4 = 0$

1 Les points $A(2;-3)$ et $B(1;0)$ appartiennent-ils à la droite ?

2 Donner un vecteur directeur de la droite.

3 Déterminer l'équation réduite de la droite.

4 Déterminer m tel que $C(2;m)$ appartienne à la droite (si c'est possible).

Exercice 26

Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de :

1 la droite (d_1) passant par $A(5;-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

2 la droite (d_2) passant par $B(-1;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-30\\20\end{pmatrix}$.

3 la droite (CD), avec $C(3;4)$ et $D(2;-2)$.

4 la droite (EF), avec $E(-3;2)$ et $F(0;-1)$.

5 la droite (d) passant par $G(1;1)$ et parallèle à la droite $(d') : x+y-4=0$.

6 la droite (Δ) passant par $H(-3;-1)$ et parallèle à la droite $(\Delta') : -5x-y+2=0$.

Exercice 27

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites (d) et (d') sont sécantes, et donner si c'est le cas leur point d'intersection.

Indication - On déterminera d'abord un vecteur directeur de chaque droite.

1 $(d) : -6x-3x+7=0$ et $(d') : 4x+2y-1=0$.

2 $(d) : 3x-2y+5=0$ et $(d') : -x+4y+3=0$.

IV - PROBABILITÉS ET INFORMATION CHIFFRÉE

1 - Utiliser les probabilités

Exercice 28

Chez un concessionnaire auto, différentes voitures sont exposées. Suivant les jours, il y a entre 0 et 4 voitures électriques exposées. Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité de cette expérience aléatoire :

Nombre de voitures électriques exposées	0	1	2	3	4
Probabilité	0.45	0.25	0.15	0.1	a

1 Déterminer la valeur de a.

2 Est-on en situation d'équiprobabilité ?

3 On note A l'événement "le nombre de voitures électriques exposées est pair". Déterminer $P(A)$.

4 On note B l'événement "le nombre de voitures électriques exposées est supérieur ou égal à 2". Déterminer $P(B)$.

5 Traduire par une phrase l'événement $A\cap B$, et déterminer $P(A\cap B)$.

6 Traduire par une phrase l'événement $A\cup B$. Déterminer $P(A\cup B)$ sans utiliser le tableau de l'énoncé.

7 Traduire par une phrase l'événement $\overline{B}$. Déterminer $P(\overline{B})$ sans utiliser le tableau de l'énoncé.

8 Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

9 On note E l'événement "le nombre de voitures électriques exposées n'est ni pair, ni supérieur ou égal à 2". Exprimer E en fonction de A et B, puis déterminer sa probabilité sans utiliser le tableau de l'énoncé.

Exercice 29

Dans une école de musique, les 500 élèves peuvent apprendre la trompette, la guitare, ou un autre instrument. Ils ont aussi la possibilité de participer à un orchestre. On sait que :
- Un quart des élèves jouent de la trompette, et 30 d'entre eux participent à un orchestre.
- 60% de tous les élèves ne sont pas dans un orchestre. Parmi eux, 170 jouent de la guitare.
- Parmi les élèves jouant un autre instrument, ceux qui participent à un orchestre représentent 80%.

On choisit un élève au hasard, et on considère les événements suivants :

— T : "l'élève joue de la trompette".
— G : "l'élève joue de la guitare".
— A : "l'élève joue d'un autre instrument".
— O : "l'élève participe à un orchestre".

1 Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide des indications de l'énoncé.

	T	G	A	Total
O				
$\overline{O}$				
Total				

2 Déterminer $P(G)$ et $P(G \cap O)$.

3 Exprimer par une phrase $G \cup O$ puis déterminer $P(G \cup O)$.

4 Exprimer par une phrase $\overline{T}$ puis déterminer $P(\overline{T})$.

5 On interroge au hasard un élève participant à un orchestre. Quelle est la probabilité p qu'il joue de la trompette ?

Exercice 30

Un groupe de personnes a été interrogé sur leurs loisirs. On sait que :

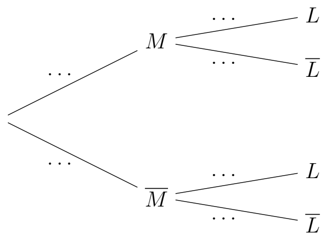
- 90% des personnes écoutent de la musique.
- Parmi les personnes écoutant de la musique, 30% des personnes lisent régulièrement.
- Parmi les personnes n'écoutant pas de musique, 60% des personnes lisent régulièrement.

On tire une personne au hasard, et on considère les événements :

- M :"La personne choisie fait de la musique."
- L :"La personne choisie lit régulièrement."

1 Déterminer $P(M)$ et $P(\overline{M})$ à l'aide de l'énoncé.

2 Compléter l'arbre ci-dessous avec les probabilités correspondantes.



3 Déterminer le pourcentage de personnes (sur tout le groupe) qui écoutent de la musique et qui lisent régulièrement. En déduire la valeur de $P(M \cap L)$.

4 Déterminer par un calcul similaire les probabilités suivantes :

$$P(M \cap \overline{L}) \qquad P(\overline{M} \cap L) \qquad P(\overline{M} \cap \overline{L})$$

2 - Étudier une série statistique

Exercice 31

Au mois de septembre, Lionel a compté le nombre d'heures par jour qu'il a passé à faire ses devoirs. On obtient la série statistique suivante :

Nombre d'heures par jour	0	1	2	3	4
Effectif	3	6	11	8	2

1 Combien de temps a-t-il passé par jour à faire ses devoirs, en moyenne ?

2 Déterminer la variance et l'écart-type de cette série (donner la valeur exacte puis un arrondi au centième).

3 Au mois d'octobre, il procède de même, et trouve cette fois $\overline{x} = 1.8$, et $\sigma = 0.75$. Sur quel mois a-t-il plus travaillé ? Sur quel mois a-t-il davantage réussi à répartir son travail à la maison ?

3 - Étudier des évolutions en pourcentage

Exercice 32

1 Un pot de pâte à tartiner coûte 5.52 euros, et son prix augmente de 25%. Quel est son nouveau prix ?

2 Un pot de miel de qualité coûte 6.40 euros, et son prix baisse de 15%. Quel est son nouveau prix ?

3 Un pot de confiture de fraise augmente de 50% et coûte à présent 1.77 euro. Quel était son prix initial ?

4 Un pot de gelée de groseille passe de 1.4 euro à 1.12 euro. Déterminer la baisse en pourcentage.

Exercice 33

Chaque année, le prix d'un article baisse de 4%.

1 Dans cette question, on suppose que son prix en 2019 est de 125 euros. Quel est son prix en 2021, càd deux ans après ? Quel est le taux d'évolution global ?

2 Dans cette question, on note P le prix de l'article en 2019 (prix initial). Quel calcul faut-il effectuer pour obtenir son prix en 2020 ? En 2021 ? En 2022 ? En 2030 ? Après n années ?

3 Après une baisse de 4%, quelle doit être la hausse en pourcentage si l'on veut revenir au prix initial ?

V - ALGORITHMIQUE ET PYTHON

1 - Appliquer un algorithme simple, et le transcrire en Python

Exercice 34

On considère l'algorithme ci-dessous.

ENTRÉE :
Saisir une valeur x.
TRAITEMENT :
$a \longleftarrow 3x - 4$.
$b \longleftarrow -x + 5$.
$y \longleftarrow a^2 + b^2$.
SORTIE :
Afficher y.

1 Compléter le tableau ci-dessous (on pourra ne détailler les calculs qu'au brouillon) :

x	a	b	y
2			
-2			

2 On note $f(x)$ la valeur affichée par l'algorithme. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

3 Écrire un script Python traduisant cet algorithme.

2 - Écrire une fonction en Python

Exercice 35

Dans une boulangerie, un pain au chocolat coûte 1.10 euro et un croissant coûte 1.20 euro.

```
def prixtotal(A,B) :
    P=.........
    return(P)
```

1 Compléter la fonction Python "**prixtotal**" ci-contre pour que la commande "**prixtotal(A,B)**" renvoie le prix total à payer en euros si l'on achète A pains au chocolat et B croissants.

2 Quelle valeur va être affichée si l'on saisit la commande "**prixtotal(3,2)**" ? Quel est le sens concret de cette valeur ?

3 Comment modifier la fonction Python précédente pour une autre boulangerie, où un pain au chocolat coûte 1.30 euro et un croissant coûte 1.05 euro ?

4 On aimerait avoir une fonction Python qui puisse s'adapter à toutes les boulangeries. Comment modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie le prix total à payer en euros si l'on achète A pains au chocolat (chacun coûtant x) et B croissants (chacun coûtant y) ?

Exercice 36

1 Écrire une fonction Python "**hypotenuse**" telle que la commande "**hypotenuse(x,y)**" renvoie la longueur L de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont de longueur x et y.

2 Dans un triangle ABC rectangle en A, on a $AB = 3$ et $AC = 4$. Quelle commande saisir pour calculer BC à l'aide de la fonction précédemment créée ?

Exercice 37

On considère la fonction $f : x \longmapsto 5x^2 - 3x + 4$. Créer une fonction Python "**f**" qui, si l'on saisit la commande "**f(x)**", renvoie l'image de x par f.

3 - Écrire/comprendre un algorithme comportant une structure conditionnelle, et le transcrire en Python

Exercice 38

On considère l'algorithme ci-contre.

Saisir une valeur x.
Si $x \geq 1$
    Alors A prend la valeur $2x - 5$.
    Sinon A prend la valeur $-3x$.
Fin Si
Afficher A.

1 Quelle valeur est affichée si l'on rentre la valeur $x = 2$? Si l'on rentre la valeur $x = -4$?

2 Écrire un script en Python traduisant cet algorithme.

Exercice 39

1 Écrire une fonction Python "**valeurabsolue**" telle que la commande "**valeurabsolue(x)**" renvoie la valeur absolue de x.

2 Écrire une fonction Python "**colinearite**" telle que la commande "**colinearite(x1,y1,x2,y2)**" renvoie "oui" ou "non", selon que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Exercice 40

Au bac, suivant la note que l'on obtient, différents cas peuvent se présenter :
- Si la note finale est strictement inférieure à 8, le candidat est refusé.
- Sinon, si la note finale est strictement inférieure à 10, le candidat passe au rattrapage.
- Sinon, si la note finale est strictement inférieure à 12, le candidat est admis sans mention.
- Sinon, si la note finale est strictement inférieure à 14, le candidat est admis mention assez bien.
- Sinon, si la note finale est strictement inférieure à 16, le candidat est admis mention bien.
- Sinon, le candidat est admis mention très bien.

Écrire une fonction Python "**note**" telle que la commande "**note(N)**" renvoie un message indiquant la situation du candidat s'il a obtenu une note N.

Indication - Le "sinon,si" peut se traduire par la commande "**elif**" en Python.

VI - CORRIGES

Exercice 1

$$\begin{aligned} A(x) &= (3x-4)(2x-5)+(-4x+2)(-5x-1) \\ &= 6x^2-15x-8x+20+20x^2+4x-10x-2 \\ &= 6x^2-23x+20+20x^2-6x-2 \\ &= 26x^2-29x+18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 6-(2x+2)(-4x+3) \\ &= 6-(-8x^2+6x-8x+6) \\ &= 6+8x^2-6x+8x-6 \\ &= 8x^2+2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= (2x+3)^2+(3x-5)^2 \\ &= 4x^2+12x+9+9x^2-30x+25 \\ &= 13x^2-18x+34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= 5-(6x-2)^2 \\ &= 5-(36x^2-24x+4) \\ &= 5-36x^2+24x-4 \\ &= -36x^2+24x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= 9x^2-25-(x^2+2x+1) \\ &= 9x^2-25-x^2-2x-1 \\ &= 8x^2-2x-26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (-2x+1)^2-(4-x)(6x-5) \\ &= (-2x)^2+2\times(-2x)\times 1+1^2-(24x-20-6x^2+5x) \\ &= 4x^2-4x+1-24x+20+6x^2-5x \\ &= 10x^2-33x+21 \end{aligned}$$

Exercice 2

1 $10x+8=2(5x+4)$

2 $-4x+44(-x+1)$

3 $8x^2-5x=x(8x-5)$

4

$$\begin{aligned} & (5x+2)(4x-3)+(3x+6)(5x+2) \\ =\ & (5x+2)[(4x-3)+(3x+6)] \\ =\ & (5x+2)(4x-3+3x+6) \\ =\ & (5x+2)(7x+3) \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} & (x+1)(3x-3)-(x+1)(2x-4) \\ =\ & (x+1)[(3x-3)-(2x-4)] \\ =\ & (x+1)(3x-3-2x+4) \\ =\ & (x+1)(x+1) \\ =\ & (x+1)^2 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} & 2x(3x-4)-(3x-4)^2+5(3x-4) \\ =\ & (3x-4)[2x-(3x-4)+5] \\ =\ & (3x-4)(2x-3x+4+5) \\ =\ & (3x-4)(-x+9) \end{aligned}$$

7 $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

8 $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

9 $36x^2-25=(6x-5)(6x+5)$

10 $1-49x^2=(1-7x)(1+7x)$

11 $x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

12

$$\begin{aligned} & (3x-5)^2-(2-x)^2 \\ =\ & [(3x-5)+(2-x)][(3x-5)-(2-x)] \\ =\ & (3x-5+2-x)(3x-5-2+x) \\ =\ & (2x-3)(4x-7) \end{aligned}$$

Exercice 3

1 $A=\dfrac{-6}{25}\times\dfrac{35}{6}=-\dfrac{6\times 35}{25\times 6}=-\dfrac{6\times 5\times 7}{5\times 5\times 6}=-\dfrac{7}{5}$

2 Le dénominateur commun à $2, 3, 4, 5$ est 60. On a :

$$B=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=\frac{60}{60}+\frac{30}{60}-\frac{40}{60}+\frac{45}{60}-\frac{48}{60}=\frac{60+30-40+45-48}{60}=\frac{47}{60}$$

3 $C=\dfrac{8}{3}\times(-9)+\left(\dfrac{-1}{-2}\right)^2=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{-9}{1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{8\times 3\times 3}{3}+\dfrac{1^2}{2^2}=-24+\dfrac{1}{4}=\dfrac{-96}{4}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{95}{4}$

4 On calcule d'abord la quantité qui apparaît deux fois : $\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{32}{40}-\dfrac{25}{40}=\dfrac{7}{40}$.

On en déduit :

$$D=\frac{\frac{4}{5}-\frac{5}{8}}{2}+\frac{3}{\frac{4}{5}-\frac{5}{8}}=\frac{\frac{7}{40}}{\frac{2}{1}}+\frac{\frac{3}{1}}{\frac{7}{40}}=\frac{7}{40}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{1}\times\frac{40}{7}=\frac{7}{80}+\frac{120}{7}=\frac{49}{560}+\frac{9600}{560}=\frac{9649}{560}$$

5 $E=-2\left(\dfrac{3}{7}-1\right)^2=-2\left(\dfrac{3}{7}-\dfrac{7}{7}\right)^2=-2\left(-\dfrac{4}{7}\right)^2=-2\left(\dfrac{4}{7}\right)^2=-2\times\dfrac{4^2}{7^2}=-\dfrac{2}{1}\times\dfrac{16}{49}=-\dfrac{32}{49}$

Exercice 4

1 $A=\dfrac{(x^2)^3}{x^3}=\dfrac{x^{2\times 3}}{x^3}=\dfrac{x^6}{x^3}=x^{6-3}=x^3$

Remarque - On peut aussi écrire : $\dfrac{x^6}{x^3}=\dfrac{x^3\times x^3}{x^3}=x^3$

2 $B=\dfrac{x^{-7}}{x^{-2}\times x^4}=\dfrac{x^{-7}}{x^{-2+4}}=\dfrac{x^{-7}}{x^2}=x^{-7-2}=x^{-9}$

3 $C=\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^3}=\dfrac{x}{x\times x}+\dfrac{x^2}{x\times x^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$

Remarque - On peut aussi écrire $x=x^1$, d'où : $\dfrac{x^1}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^3}=x^{1-2}+x^{2-3}=x^{-1}+x^{-1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$

4 On simplifie ce qu'il y a dans la parenthèse : $\dfrac{1}{x^{-2}}=\dfrac{x^0}{x^{-2}}=x^{0-(-2)}=x^2$

On en déduit :

$$D=\left(\frac{1}{x^{-2}}\right)^{-3}=\left(x^2\right)^{-3}=x^{2\times -3}=x^{-6}=\frac{1}{x^6}$$

Exercice 5

1 On a : $|8|=8 \qquad |-5|=5 \qquad |0.4|=0.4 \qquad |-\sqrt{3}|=\sqrt{3} \qquad \left|-\dfrac{4}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$

2 Pour simplifier ces deux valeurs absolues, il faut déterminer si la quantité à l'intérieur est positive ou négative. Puisque $\sqrt{2} \simeq 1.4$, on a :

- $\sqrt{2}+5>0$ donc $|\sqrt{2}+5| = \sqrt{2}+5$.
- $\sqrt{2}-10<0$ donc $|\sqrt{2}-10| = -(\sqrt{2}-10) = -\sqrt{2}+10$.

On en déduit : $|\sqrt{2}+5|+|\sqrt{2}-10| = \sqrt{2}+5-\sqrt{2}+10 = 15$.

3 - Vrai ou Faux - Pour tout nombre réel x, on a : $|x+2| = x+2$.

FAUX - Il suffit de trouver un contre-exemple, càd une valeur de x pour laquelle cette égalité est fausse. Par exemple, avec $x=-10$, on a :

$$|-10+2| = |-8| = 8 \qquad \neq \qquad -10+2=-8$$

4 - Vrai ou Faux - Il existe un nombre réel x tel que : $|x+2| = x+2$.

VRAI - Il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie. Par exemple, avec $x=0$, on a :

$$|0+2| = |2| = 2 \qquad \text{et} \qquad 0+2=2$$

***En fait* -** Ici la quantité dans les valeurs absolues peut être positive ou négative selon les valeurs prises par x. Si l'on veut enlever les valeurs absolues, on doit distinguer deux cas. Ici, ça donne :

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{si } x+2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

Exercice 6

1 On a :

$$\sqrt{28} = \sqrt{4\times 7} = \sqrt{4}\times\sqrt{7} = 2\sqrt{7} \qquad \sqrt{75} = \sqrt{25\times 3} = \sqrt{25}\times\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100\times 2} = \sqrt{100}\times\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \qquad \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

2 On a :

(a) $3\sqrt{2}\times 5\sqrt{6} = 3\times 5\times\sqrt{2}\times\sqrt{6} = 15\sqrt{12} = 15\sqrt{4\times 3} = 15\sqrt{4}\sqrt{3} = 15\times 2\times\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$

(b) $-\sqrt{8}\times 3\sqrt{2}\times(5\sqrt{3})^2 = -3\times\sqrt{8}\times\sqrt{2}\times(5^2\times(\sqrt{3})^2) = -3\sqrt{16}\times 25\times 3 = -3\times 4\times 75 = -900$

(c) $8\sqrt{2}+5\sqrt{8}-3\sqrt{18} = 8\sqrt{2}+5\sqrt{4}\sqrt{2}-3\sqrt{9}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-3\times 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}+10\sqrt{2}-9\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

(d)
$$\begin{aligned} & (5-3\sqrt{3})(2\sqrt{12}-1) \\ = \;& 10\sqrt{12}-5-6\sqrt{3}\sqrt{12}+3\sqrt{3} \\ = \;& 10\sqrt{4}\sqrt{3}-5-6\sqrt{36}+3\sqrt{3} \\ = \;& 10\times 2\sqrt{3}-5-6\times 6+3\sqrt{3} \\ = \;& 20\sqrt{3}-5-36+3\sqrt{3} \\ = \;& -41+23\sqrt{3} \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} & (5-2\sqrt{6})^2+(3+\sqrt{6})^2 \\ = \;& 5^2-2\times 5\times 2\sqrt{6}+(2\sqrt{6})^2+3^2+2\times 3\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2 \\ = \;& 25-20\sqrt{6}+2^2\times(\sqrt{6})^2+9+6\sqrt{6}+6 \\ = \;& 25-20\sqrt{6}+4\times 6+9+6\sqrt{6}+6 \\ = \;& 25-20\sqrt{6}+24+9+6\sqrt{6}+6 \\ = \;& 64-14\sqrt{6} \end{aligned}$$

(f) $(4-3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2}) = 4^2-(3\sqrt{2})^2 = 16-3^2\times(\sqrt{2})^2 = 16-9\times 2 = 16-18 = -2$

Exercice 7

1 On a :

- $(\sqrt{10})^2 = 10$
- $(\sqrt{-3})^2$ n'existe pas (pas de nombre négatif sous le symbole "radical" $\sqrt{\ }$).
- $\sqrt{10^2} = |10| = 10$
- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

2 On a :

$$\sqrt{(4-5x)^2} = |4-5x| \qquad (\sqrt{4-5x})^2 = 4-5x \qquad \sqrt{4x^2} = \sqrt{4}\sqrt{x^2} = 2|x|$$

***Remarque* -** On peut écrire :

$$|4-5x| = \begin{cases} 4-5x & \text{si } 4-5x \geq 0 \\ -(4-5x) & \text{si } 4-5x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x-5 & \text{si } -5x \geq -4 \\ -4+5x & \text{si } -5x \leq -4 \end{cases} = \begin{cases} 4x-5 & \text{si } x \leq \dfrac{4}{5} \\ -4+5x & \text{si } x \geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

3 Les deux premiers dénominateurs sont de la forme $a\sqrt{b}$, il suffit de multiplier par $\sqrt{b}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{6\times\sqrt{3}}{5\times(\sqrt{3})^2} = \frac{6\times\sqrt{3}}{5\times 3} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Pour les deux derniers, il faut multiplier par l'expression conjuguée et utiliser l'IR3 :

$$\frac{6}{4-\sqrt{3}} = \frac{6(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})} = \frac{6(4+\sqrt{3})}{4^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{6(4+\sqrt{3})}{16-3} = \frac{6(4+\sqrt{3})}{13} = \frac{24+6\sqrt{3}}{13}$$

$$\frac{4}{2+\sqrt{2}} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{2} = 2(2-\sqrt{2}) = 4-2\sqrt{2}$$

Exercice 8

(a) $3x-5=0 \iff 3x=5 \iff x=\dfrac{5}{3}$ $\qquad S=\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

(b) $-2x+8=1 \iff -2x=1-8 \iff -2x=-7 \iff x=\dfrac{-7}{-2} \iff x=\dfrac{7}{2}$ $\qquad S=\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

(c) $4x-5=-x-8 \iff 4x+x=-8+5 \iff 5x=-3 \iff x=\dfrac{-3}{5} \iff x=-\dfrac{3}{5}$
$S=\left\{-\dfrac{3}{5}\right\}$

(d) $5x-7>0 \iff 5x>7 \iff x>\dfrac{7}{5}$ $\qquad S=\left]\dfrac{7}{5};+\infty\right[$

(e) Attention à bien modifier le sens de l'inégalité quand on divise par un nombre négatif :

$$-2x+9\geq 0 \iff -2x\geq -9 \iff x\leq\frac{-9}{-2} \iff x\leq\frac{9}{2} \qquad S=\left]-\infty;\frac{9}{2}\right]$$

(f) $5x-4\leq 6x+1 \iff 5x-6x\leq 1+4 \iff -x\leq 5 \iff x\geq\dfrac{5}{-1} \iff x\geq -5$
$S=[-5;+\infty[$

Exercice 9

(*a*) On résout :

$$\begin{aligned}(4x-5)(8x+3)=0 &\iff 4x-5=0 \text{ ou } 8x+3=0\\ &\iff 4x=5 \text{ ou } 8x=-3\\ &\iff x=\frac{5}{4} \text{ ou } x=\frac{-3}{8}\end{aligned}$$

Donc $S=\left\{\frac{5}{4};-\frac{3}{8}\right\}$.

(*b*) On résout :

$$\begin{aligned}3(2x-7)(-x+3)=0 &\iff \underbrace{3=0}_{Faux} \text{ ou } 2x-7=0 \text{ ou } -x+3=0\\ &\iff 2x=7 \text{ ou } -x=-3\\ &\iff x=\frac{7}{2} \text{ ou } x=3\end{aligned}$$

Donc $S=\left\{\frac{7}{2};3\right\}$.

(*c*) On résout :

$$\begin{aligned}-5x^2+2x+13=13 &\iff -5x^2+2x=13-13\\ &\iff x(-5x+2)=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } -5x+2=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } -5x=-2\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{-2}{-5}\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

Donc $S=\left\{0;\frac{2}{5}\right\}$.

(*d*) On résout :

$$\begin{aligned}(-x+3)^2-(4x+5)^2=0 &\iff [(-x+3)+(4x+5)][(-x+3)-(4x+5)]=0\\ &\iff (-x+3+4x+5)(-x+3-4x-5)=0\\ &\iff (3x+8)(-5x-2)=0\\ &\iff 3x+8=0 \text{ ou } -5x-2=0\\ &\iff 3x=-8 \text{ ou } -5x=2\\ &\iff x=\frac{-8}{3} \text{ ou } x=\frac{2}{-5}\end{aligned}$$

Donc $S=\left\{-\frac{8}{3};-\frac{2}{5}\right\}$.

(*e*) Résoudre $(4x-3)(-2x-5)\leq 0$.

On a :

- $4x-3=0 \iff 4x=3 \iff x=\frac{3}{4}$
- $-2x-5=0 \iff -2x=5 \iff x=\frac{5}{-2} \iff x=-\frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de $4x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-2x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(4x-3)(-2x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$.

(*f*) Résoudre $-3(-x+1)(6x-3)<0$.

On a :

- $-3<0$ (peu importe les valeurs prises par x)
- $-x+1=0 \iff -x=-1 \iff x=1$
- $6x-3=0 \iff 6x=3 \iff x=\frac{3}{6} \iff x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de -3		$-$		$-$		$-$	
Signe de $-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $6x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-3(-x+1)(6x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=\left]\frac{1}{2};1\right[$.

Exercice 10

(*a*) On résout l'inéquation $\dfrac{4x-1}{3x+1} \geq 0$

On a :

- $4x-1=0 \iff 4x=1 \iff x=\dfrac{1}{4}$
- $3x+1=0 \iff 3x=-1 \iff x=\dfrac{-1}{3} \iff x=-\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{4x-1}{3x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc $S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.

(*b*) On résout l'inéquation $\dfrac{x}{1-2x} > 0$

On a :

- x s'annule en 0
- $1-2x=0 \iff -2x=-1 \iff x=\dfrac{-1}{-2} \iff x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{x}{1-2x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Donc $S=\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$.

Remarques :

- $x=1x+0$ donc le coefficient directeur est $1>0$.
- $1-2x=-2x+1$ donc le coefficient directeur est $-2<0$.

(*c*) ***Rappel - Pour résoudre une équation avec des dénominateurs, on détermine les valeurs interdites, puis on peut (par exemple) utiliser un produit en croix.***

Une éventuelle valeur interdite est solution de :

$$2x-5=0 \iff 2x=5 \iff x=\frac{5}{2}$$

On résout donc sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$:

$$\begin{aligned} \frac{5x-2}{2x-5}=2 &\iff \frac{5x-2}{2x-5}=\frac{2}{1} \\ &\iff (5x-2)\times 1=(2x-5)\times 2 \\ &\iff 5x-2=4x-10 \\ &\iff 5x-4x=-10+2 \\ &\iff x=-8 \end{aligned}$$

Donc $S=\{-8\}$.

Remarques :

- $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ se lit $\mathbb{R}$ privé de $\dfrac{5}{2}$.
- Si vous êtes à l'aise, n'hésitez pas à aller plus vite et à écrire directement $5x-2=2(2x-5)$.
- La valeur obtenue n'est pas une valeur interdite (ce n'est pas $\dfrac{5}{2}$), donc on peut la "garder" comme solution. Si c'était le cas, il faudrait l'enlever de l'ensemble des solutions.
- Attention toutefois, cette méthode est a priori fausse s'il s'agit d'une inéquation. La technique en ce cas est de se ramener à un second membre nul, de réduire au même dénominateur, puis de faire un tableau de signes. Par exemple :

$$\frac{5x-2}{2x-5}\geq 2 \iff \frac{5x-2}{2x-5}-2\geq 0 \iff \frac{5x-2}{2x-5}-\frac{2(2x-5)}{2x-5}\geq 0 \iff \frac{5x-2-(4x-10)}{2x-5}\geq 0 \iff \frac{x+8}{2x-5}\geq 0$$

On construit ensuite le tableau de signes associé pour conclure.

(*d*) On peut procéder avec un produit en croix comme ci-dessus en écrivant $0=\dfrac{0}{1}$, mais le mieux est de retenir directement l'astuce ci-dessous, très utile :

> Étant donnés deux nombres réels A et B tels que $B\neq 0$, on a :
>
> $$\frac{A}{B}=0 \iff A=0$$
>
> En d'autres termes, le dénominateur n'a pas d'importance : une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

Une éventuelle valeur interdite est solution de :

$$1-x=0 \iff -x=-1 \iff x=1$$

On résout donc sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\frac{3-4x}{1-x}=0 \iff 3-4x=0 \iff -4x=-3 \iff x=\frac{-3}{-4} \iff x=\frac{3}{4}$$

Donc $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

Exercice 11

Méthode - Il faut vraiment avoir en tête la courbe de la fonction carré pour résoudre des équations et inéquations.

— Si $a \geq 0$, on a :
$$x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$
— Si $a < 0$, on a :

$x^2 = a$ n'est jamais vrai (un carré est toujours positif)

— Si $a \geq 0$, on a :

$x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ $\qquad$ $x^2 \geq a \iff x \leq -\sqrt{a}$ ou $x \geq \sqrt{a}$

— Si $a < 0$, on a :

$x^2 \leq a$ est toujours faux $\qquad$ $x^2 \geq a$ est toujours vrai

1 On a :

- $x^2 = 8 \iff x = \sqrt{8}$ ou $x = -\sqrt{8}$ $\qquad$ donc $S = \{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$.
- $\underbrace{x^2 = -3}_{\text{Impossible}}$ $\qquad$ donc $S = \emptyset$.
- $x^2 = 0 \iff x = 0$ $\qquad$ donc $S = \{0\}$.
- $5x^2 - 6 = 0 \iff 5x^2 = 6 \iff x^2 = \dfrac{6}{5} \iff x = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{6}{5}}$

  Donc $S = \left\{-\sqrt{\dfrac{6}{5}}; \sqrt{\dfrac{6}{5}}\right\}$.
- $2x^2 + 3 = 0 \iff 2x^2 = -3 \iff \underbrace{x^2 = -\dfrac{3}{2}}_{\text{Impossible}}$ $\qquad$ donc $S = \emptyset$.
- $x^2 \geq 5 \iff x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$ $\qquad$ donc $S =]-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty[$.
- $x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ $\qquad$ donc $S =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.
- $\underbrace{x^2 \geq -3}_{\text{Toujours vrai}}$ $\qquad$ donc $S = \mathbb{R}$.
- $\underbrace{x^2 < -1}_{\text{Impossible}}$ $\qquad$ donc $S = \emptyset$.

Méthode - La fonction cube est strictement croissante, donc la résolution d'équations et d'inéquations est beaucoup plus facile (pas de cas à distinguer) et se fait avec la racine cubique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$x^3 = a \iff x = \sqrt[3]{a}$ $\qquad$ $x^3 \leq a \iff x \leq \sqrt[3]{a}$ $\qquad$ $x^3 \geq a \iff x \geq \sqrt[3]{a}$

2 On a :

- $x^3 = 64 \iff x = \sqrt[3]{64} \iff x = 4$ $\qquad$ donc $S = \{4\}$.
- $x^3 = -729 \iff x = \sqrt[3]{-729} \iff x = -9$ $\qquad$ donc $S = \{-9\}$.
- $x^3 \leq 1 \iff x \leq \sqrt[3]{1} \iff x \leq 1$ $\qquad$ donc $S =]-\infty; 1]$.
- $x^3 > -2 \iff x > \sqrt[3]{-2}$ $\qquad$ donc $S =]\sqrt[3]{-2}; +\infty[$.

Méthode - Pour les équations avec la fonction racine carrée, bien se rappeler que la racine carrée d'un nombre est un nombre positif :

Si $a \geq 0$: $\quad \sqrt{x} = a \iff x = a^2$ $\qquad$ Si $a < 0$: $\quad \sqrt{x} = a$ est impossible

Pour les inéquations avec la fonction racine carrée, bien se rappeler que quand on écrit $\sqrt{x}$, on suppose implicitement que $x \geq 0$ (les ensemble des solutions démarrent donc à 0, et non à $-\infty$) :

Si $a \geq 0$: $\quad \sqrt{x} \geq a \iff x \geq a^2$ $\qquad$ $\sqrt{x} \leq a \iff x \leq a^2$

Si $a < 0$: $\quad \sqrt{x} \geq a$ est toujours vrai $\qquad$ $\sqrt{x} \leq a$ est toujours faux

3 On a :

- $\sqrt{x} = 7 \iff x = 7^2 \iff x = 49$ $\qquad$ donc $S = \{49\}$.
- $\underbrace{\sqrt{x} = -3}_{\text{Impossible}}$ $\qquad$ donc $S = \emptyset$.
- $\sqrt{x} < 8 \iff x < 8^2 \iff x < 64$ $\qquad$ donc $S = [0; 64[$.
- $\sqrt{x} \geq 2 \iff x \geq 2^2 \iff x \geq 4$ $\qquad$ donc $S = [4; +\infty[$.
- $\underbrace{\sqrt{x} > -6}_{\text{Toujours vrai}}$ $\qquad$ donc $S = [0; +\infty[$.
- $\underbrace{\sqrt{x} \leq -4}_{\text{Impossible}}$ $\qquad$ donc $S = \emptyset$.

Méthode - Pour les équations avec des valeurs absolues, bien se rappeler que la valeur absolue d'un nombre représente sa distance à 0.

— Si $a \geq 0$: $\qquad |x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$

— Si $a < 0$: $\qquad |x| = a$ n'est jamais vrai (une distance est toujours positive)

— Deux nombres de même valeur absolue sont égaux ou opposés :
$$|x| = |y| \iff x = y \text{ ou } x = -y$$

4 On a :

- $|x| = 4 \iff x = 4$ ou $x = -4$ donc $S = \{-4; 4\}$

- $$\begin{aligned} |3x+5| = 8 &\iff 3x+5 = 8 \text{ ou } 3x+5 = -8 \\ &\iff 3x = 8-5 \text{ ou } 3x = -8-5 \\ &\iff 3x = 3 \text{ ou } 3x = -13 \\ &\iff x = \frac{3}{3} \text{ ou } x = \frac{-13}{3} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

  Donc $S = \left\{1; -\frac{13}{3}\right\}$.

- $\underbrace{|2x-1| = -2}_{\text{Impossible}}$ donc $S = \emptyset$.

- $$\begin{aligned} |5-2x| = |4x+1| &\iff 5-2x = 4x+1 \text{ ou } 5-2x = -(4x+1) \\ &\iff 5-2x = 4x+1 \text{ ou } 5-2x = -4x-1 \\ &\iff -2x-4x = 1-5 \text{ ou } -2x+4x = -1-5 \\ &\iff -6x = -4 \text{ ou } 2x = -6 \\ &\iff x = \frac{-4}{-6} \text{ ou } x = \frac{-6}{2} \\ &\iff x = \frac{4}{6} \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

  Donc $S = \left\{\frac{2}{3}; -3\right\}$.

Remarque - On peut aussi utiliser des valeurs absolues pour résoudre des équations de type $x^2 = a$.
Par exemple :

$$x^2 = 8 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{8} \iff |x| = \sqrt{8} \iff x = \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8}$$

C'est plus long, mais on retombe sur les valeurs obtenues en question 1.

Exercice 12

Ci-dessous les deux systèmes résolus par combinaison :

$$\begin{cases} 5x+3y = 1 \\ 2x-4y = 16 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2(5x+3y) = 2\times 1 \\ 5(2x-4y) = 5\times 16 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 10x+6y = 2 & L_1 \\ 10x-20y = 80 & L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 26y = -78 & L_1 - L_2 \\ 10x-20y = 80 & L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \frac{-78}{26} \\ 10x-20y = 80 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -3 \\ 10x - 20\times(-3) = 80 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -3 \\ 10x+60 = 80 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -3 \\ 10x = 80-60 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -3 \\ 10x = 20 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -3 \\ x = \frac{20}{10} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc $S = \{\,(2; -3)\,\}$.

$$\begin{cases} 3x+4y = -1 \\ -x+y = 12 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4y = -1 \\ -3(-x+y) = -3\times 12 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4y = -1 & L_1 \\ 3x-3y = -36 & L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 7y = 35 & L_1 - L_2 \\ 3x+4y = -1 & L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \frac{35}{7} \\ 3x+4y = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 5 \\ 3x + 4\times 5 = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 5 \\ 3x+20 = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 5 \\ 3x = -1-20 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 5 \\ 3x = -21 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 5 \\ x = \frac{-21}{3} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 5 \\ x = -7 \end{cases}$$

Donc $S = \{\,(-7; 5)\,\}$.

Exercice 13

1a $f(-4) = -2 \times (-4)^2 + 3 \times (-4) - 4 = -2 \times 16 - 12 - 4 = -32 - 16 = -48$.
Donc l'image de -4 par f est -48.

1b On résout :
$$\begin{aligned} f(x) = -4 &\iff -2x^2 + 3x - 4 = -4 \\ &\iff -2x^2 + 3x = -4 + 4 \\ &\iff -2x^2 + 3x = 0 \\ &\iff x(-2x+3) = 0 \\ &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ -2x + 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ -2x = -3 \\ &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{-3}{-2} \\ &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Les antécédents de -4 par f sont 0 et $\frac{3}{2}$.

1c On calcule :
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} - 4 \\ &= -\frac{2}{1} \times \frac{1^2}{2^2} + \frac{3}{1} \times \frac{1}{2} - 4 \\ &= -\frac{2 \times 1}{1 \times 4} + \frac{3}{2} - 4 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 4 \\ &= \frac{2}{2} - 4 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Donc le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ appartient à la courbe de f.

1d $f(\sqrt{3}) = -2 \times (\sqrt{3})^2 + 3 \times \sqrt{3} - 4 = -2 \times 3 + 3\sqrt{3} - 4 = -6 + 3\sqrt{3} - 4 = -10 + 3\sqrt{3}$

1e Cette courbe a pour équation $y = f(x)$, càd $y = -2x^2 + 3x - 4$.

2a $g(0) = -2 \times 0^2 + 3 \times 0 - 4 = -2 \times 0 + 0 - 4 = 0 - 4 = -4$.
$-4 \neq 1$ donc 0 n'est pas un antécédent de 1 par g.

2b La courbe de g coupe l'axe des ordonnées en un point d'abscisse 0 et d'ordonnée $g(0) = -4$ (cf. question 2a). Ce point a donc pour coordonnées $(0; -4)$.

2c On résout :
$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff -2(x-3)(x+4) = 0 \\ &\iff \underbrace{-2 = 0}_{Faux} \ \text{ ou } \ x - 3 = 0 \ \text{ ou } \ x + 4 = 0 \\ &\iff x = 3 \ \text{ ou } \ x = -4 \end{aligned}$$

Donc les antécédents de 0 par g sont 3 et -4.

2d La courbe de g coupe l'axe des abscisses en des points d'ordonnée 0, et d'abscisse les antécédents de 0 (quand il y en a).
D'après la question précédente, ici, la courbe de g coupe l'axe des abscisses en $(3; 0)$ et en $(-4; 0)$.

2e Cette courbe a pour équation $y = g(x)$, càd $y = -2(x-3)(x+4)$.

2f Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = -2(x-3)(x+4) = -2(x^2 + 4x - 3x - 12) = -2(x^2 + x - 12) = -2x^2 - 2x + 24$$

3 On résout :
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -2x^2 + 3x - 4 = -2x^2 - 2x + 24 \\ &\iff -2x^2 + 2x^2 + 3x + 2x = 24 + 4 \\ &\iff 5x = 28 \\ &\iff x = \frac{28}{5} \end{aligned}$$

On en déduit que les deux courbes ont un unique point d'intersection, d'abscisse $x = \frac{28}{5}$, et d'ordonnée :

$$g\left(\frac{28}{5}\right) = -2\left(\frac{28}{5} - 3\right)\left(\frac{28}{5} + 4\right) = -2\left(\frac{28}{5} - \frac{15}{5}\right)\left(\frac{28}{5} + \frac{20}{5}\right) = -\frac{2}{1} \times \frac{13}{5} \times \frac{48}{5} = -\frac{1248}{25}$$

Remarque - On pouvait aussi calculer $f\left(\frac{28}{5}\right)$ pour déterminer l'ordonnée du point.

Exercice 14

1 f est définie sur $[-8; 7]$. Ci-dessous le tableau des variations, puis le tableau de signe :

x	-8		-5		2		0		7
Variations de f			6				4		
	4	↗		↘	0	↗		↘	-3

x	-8		-2		3		7
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

2 f admet un maximum sur $[-8; 7]$, égal à 6, et atteint en $x = -5$.
f admet un minimum sur $[-8; 7]$, égal à -3, et atteint en $x = 7$.

3 La courbe de f n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc f n'est pas paire.
La courbe de f n'est pas symétrique par rapport à l'origine, donc f n'est pas impaire.

4 $f(-5) = 6$ et $f(6) = -2$.

5 L'image de 4 par f est -1. Les antécédents de 4 par f sont -8, -4, et 0.

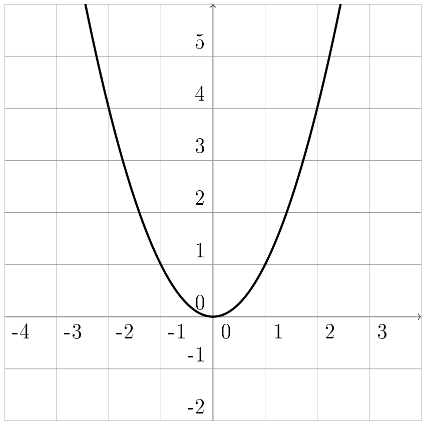
6 1 a trois antécédents par f : -3, -1.4 environ, et 2.5.

7 On résout graphiquement sur $[-8;7]$:

- $f(x) = 2$ $S = \{-3.5; -1; 2\}$
- $f(x) = 4$ $S = \{-8; -4; 0\}$
- $f(x) > 4$ $S =]-8; -4[$
- $f(x) \leq 4$ $S = \{-8\} \cup [-4; 7]$
- $f(x) = g(x)$ $S = \{-3; -1; 1\}$
- $f(x) < g(x)$ $S =]-3; -1[\cup]1; 7]$

Exercice 15

(a) $f : x \longmapsto x^2$ est la fonction carré.



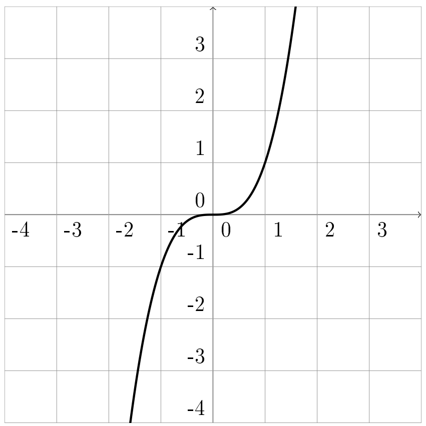
Cette courbe a pour équation $y = x^2$.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la fonction est paire. La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine, donc la fonction n'est pas impaire.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$+$

(b) $g : x \longmapsto x^3$ est la fonction cube.



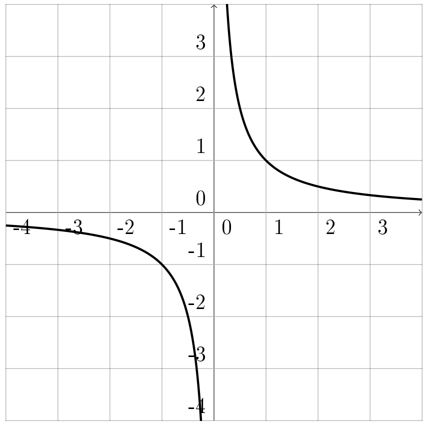
Cette courbe a pour équation $y = x^3$.

La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la fonction n'est pas paire. La courbe est symétrique par rapport à l'origine, donc la fonction est impaire.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de g	$\nearrow$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

(c) $h : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est la fonction inverse.



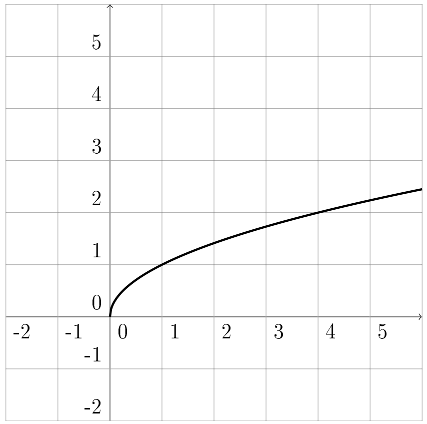
Cette courbe a pour équation $y = \dfrac{1}{x}$.

La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la fonction n'est pas paire. La courbe est symétrique par rapport à l'origine, donc la fonction est impaire.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de h	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $h(x)$	$-$	$\Vert$	$+$

(d) $k : x \longmapsto \sqrt{x}$ est la fonction racine carrée.



Cette courbe a pour équation $y = \sqrt{x}$.

La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la fonction n'est pas paire. La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine, donc la fonction n'est pas impaire.

x	0	$+\infty$
Variations de k	$\nearrow$	

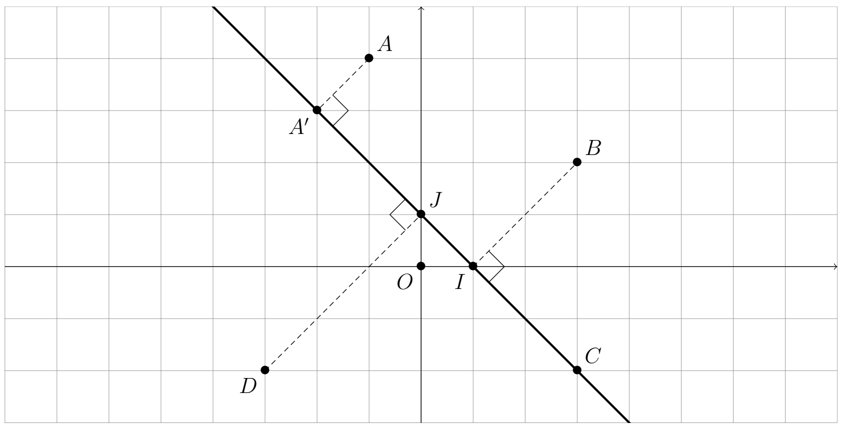
x	0	$+\infty$
Signe de $k(x)$	0	$+$

Exercice 16

1 On a :

$A(-1;4)$ $B(3;2)$ $C(3;-2)$ $D((-3;-2)$ $O(0;0)$ $I(1;0)$ $J(0;1)$

2 Le projeté orthogonal de A sur la droite (IJ) est $A'(-2;3)$.
Le projeté orthogonal de B sur la droite (IJ) est $I(1;0)$.
Le projeté orthogonal de C sur la droite (IJ) est lui-même (puisque C est déjà sur la droite).
Le projeté orthogonal de D sur la droite (IJ) est $J(0;1)$.



Exercice 17

1a Dans le repère (A,B,D), on a :

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $C(1;1)$ $D(0;1)$ $M(0;0.5)$ $N(0.75;0.75)$ $O(0.5;0.5)$

Détail - Pour le point N, on peut remarquer que N est le milieu de $[OC]$, donc :

$$N\left(\frac{0.5+1}{2};\frac{0.5+1}{2}\right) \quad \text{càd} \quad N\left(\frac{1.5}{2};\frac{1.5}{2}\right) \quad \text{càd} \quad N\,(0.75;0.75)$$

1b Dans le repère (O,B,C), on a :

$A(0;-1)$ $B(1;0)$ $C(0;1)$ $D(-1;0)$ $M(-0.5;-0.5)$ $N(0;0.5)$ $O(0,0)$

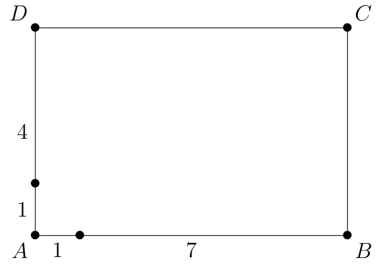
Détail - Pour le point M, on peut remarquer que M est le milieu de $[AD]$, donc :

$$M\left(\frac{0+(-1)}{2};\frac{-1+0}{2}\right) \quad \text{càd} \quad M\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right) \quad \text{càd} \quad M\,(-0.5;-0.5)$$

2a Si l'on choisit le repère (A,B,D), on aura $B(1;0)$ et $D(0;1)$, ce qui ne nous permet pas de traduire les distances 4 et 7. On aimerait une distance de 1 sur le segment $[AB]$ et sur le segment $[AD]$, on peut utiliser des vecteurs.

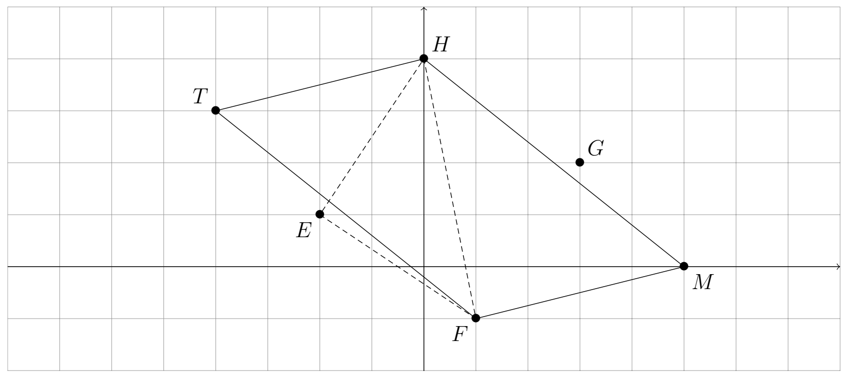
On se place dans le repère $\left(A\,,\,\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}\,,\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.

2b Dans ce repère orthonormé ainsi construit, on a $C(7;4)$.



Exercice 18

1 Ci-dessous la figure complétée :



2a D'une part, le milieu du segment $[TM]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-4+5}{2};\frac{3+0}{2}\right)$, càd $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.
D'autre part, le milieu du segment $[FH]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2};\frac{-1+4}{2}\right)$, càd $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.
Les diagonales du quadrilatère $TFMH$ ont le même milieu, donc c'est un parallélogramme.

Autre méthode - Avec les vecteurs. On a :

$$\overrightarrow{TF}\begin{pmatrix}1-(-4)\\-1-3\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{TF}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}5-0\\0-4\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{TF}=\overrightarrow{HM}$, donc $TFMH$ est un parallélogramme.

2b D'une part :

$$TF=\sqrt{(1-(-4))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$$TH=\sqrt{(0-(-4))^2+(4-3)^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

On a $TF \neq TH$, donc le parallélogramme $TFMH$ n'est pas un losange (côtés consécutifs de longueurs différentes).

D'autre part :

$$TM = \sqrt{(5-(-4))^2+(0-3)^2} = \sqrt{9^2+(-3)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$$
$$FH = \sqrt{(0-1)^2+(4-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

On a $TM \neq FH$, donc le parallélogramme $TFMH$ n'est pas un rectangle (diagonales de longueurs différentes).

3 On a déjà $FH = \sqrt{26}$. De plus :

$$EF = \sqrt{(1-(-2))^2+(-1-1)^2} = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$EH = \sqrt{(0-(-2))^2+(4-1)^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

On a :

- $EF^2 + EH^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = 13 + 13 = 26$
- $FH^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$

Donc $EF^2 + EH^2 = FH^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFH est rectangle en E.

De plus $EF = EH$, donc le triangle EFH est rectangle isocèle en E.

4 On a :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-1\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}3-0\\2-4\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, donc $EFGH$ est un parallélogramme.

De plus, $EF = EH$ donc $EFGH$ est un losange (parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur).

Enfin, le losange $EFGH$ a un angle droit en E, donc c'est un carré.

Exercice 19

1 On a :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PS} \qquad \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{YO} \qquad 2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EK} \qquad -3\overrightarrow{SX} = \overrightarrow{SD}$$

2 On a :

(*a*) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{KR} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AJ}$

(*b*) $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NV} = \overrightarrow{GV} = \overrightarrow{DS}$

(*c*) $\overrightarrow{UK} - \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{UK} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{UK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{UM} = \overrightarrow{ME}$

(*d*) $-3\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{NF}$

Exercice 20

1 L'astuce est de rajouter un point qui permet de faire un détour : plutôt que d'aller directement de B à D, on passe d'abord par A, ce qui donne :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

2 Même méthode, ce qui permet d'utiliser les données de l'énoncé :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

3 On a donc $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ (autre formulation, équivalente : $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{EF}$).

Remarque - Détail du calcul si besoin :

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$$

4 Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires (=multiples l'un de l'autre), donc $(EF) /\!/ (BD)$.

5 Les points A, E, B d'une part, et les points A, F, D d'autre part sont alignés dans le même ordre. De plus, on a :

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

Exercice 21

1 On calcule : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-3)\\2-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-(-3)\\-2-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}$.

2 On a : $\quad \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}2 & 10\\1 & -3\end{vmatrix} = 2\times(-3) - 10\times 1 = -6 - 10 = -16 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

3 On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}7-x_D\\-2-y_D\end{pmatrix}$. On résout :

$$\begin{aligned}
ABCD \text{ est un parallélogramme} \quad &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}7-x_D\\-2-y_D\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}7-x_D = 2\\-2-y_D = 1\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}-x_D = 2-7\\-y_D = 1+2\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}-x_D = -5\\-y_D = 3\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}x_D = 5\\y_D = -3\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $D(5;-3)$.

4 Si $E(x_E;y_E)$, alors :

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-(-3)\\y_E-1\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E+3\\y_E-1\end{pmatrix} \text{ donc } 3\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3(x_E+3)\\3(y_E-1)\end{pmatrix} \text{ donc } 3\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3x_E+9\\3y_E-3\end{pmatrix}.$$

De plus :

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-7\\y_E-(-2)\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-7\\y_E+2\end{pmatrix}.$$

Par somme :

$$3\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}3x_E+9+x_E-7\\3y_E-3+y_E+2\end{pmatrix} \text{ donc } 3\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}4x_E+2\\4y_E-1\end{pmatrix}.$$

On résout donc :

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0} &\iff \begin{cases}4x_E+2=0\\4y_E-1=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}4x_E=-2\\4y_E=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x_E=\dfrac{-2}{4}\\y_E=\dfrac{1}{4}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x_E=\dfrac{-1}{2}\\y_E=\dfrac{1}{4}\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

5 $M(x;y)$ est sur l'axe des abscisses si et seulement si $y=0$. On cherche donc $M(x;0)$ tel que $(AB)\mathbin{/\!/}(CM)$:

$$\begin{aligned}
(AB)\mathbin{/\!/}(CM) &\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-7\\0-(-2)\end{pmatrix} \text{ colinéaires.}\\
&\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-7\\2\end{pmatrix} \text{ colinéaires.}\\
&\iff \begin{vmatrix}2 & x-7\\1 & 2\end{vmatrix}=0\\
&\iff 2\times2-1\times(x-7)=0\\
&\iff 4-(x-7)=0\\
&\iff 4-x+7=0\\
&\iff 11-x=0\\
&\iff 11=x\\
&\iff x=11
\end{aligned}$$

Donc $M(11;0)$.

Exercice 22

1 On a :

- $(d_1) : y=-x$ a (par exemple) pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
- $(d_2) : y=-\frac{1}{3}x+1$ a (par exemple) pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
- $(d_3) : y=x$ a (par exemple) pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
- $(d_4) : y=\frac{5}{2}x-2$ a (par exemple) pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.
- $(d_5) : x=6$ a (par exemple) pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_5}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
- $(d_6) : y=2$ a (par exemple) pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_6}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

2 On a :

- $y_A=y_B=3$, donc (AB) est horizontale, et $(AB) : y=3$.
- $x_B=x_C=5$, donc (BC) est verticale, et $(BC) : x=2$.
- A et C sont deux points pour lesquels l'abscisse et l'ordonnée sont les mêmes, donc ces deux points sont sur la droite d'équation réduite $y=x$ (c'est la droite (d_3) de la question précédente, que l'on appelle parfois ***la première bissectrice***). Donc $(AC) : y=x$.

Exercice 23

1 (d) et (d') ont le même coefficient directeur (c'est 3), donc elles sont parallèles.

2 (d) et (d') n'ont pas le même coefficient directeur $(2\neq-4)$, donc elles sont sécantes. Soit $M(x;y)$ leur point d'intersection. On a :

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in(d)\cap(d') &\iff \begin{cases}y=2x-3 & L_1\\y=-4x+3 & L_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}0=6x-6 & L_1-L_2\\y=2x-3 & L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-6x=-6\\y=2x-3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=\dfrac{-6}{-6}\\y=2x-3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=1\\y=2\times1-3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $M(1;-1)$.

3 (d) et (d') n'ont pas le même coefficient directeur $(5 \neq 0)$, donc elles sont sécantes. Soit $M(x;y)$ leur point d'intersection. On a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (d) \cap (d') &\iff \begin{cases} y = -5x \\ y = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -1 = -5x \\ y = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $M\left(\dfrac{1}{5};-1\right)$.

4 (d') est parallèle à l'axe des ordonnées et (d) ne l'est pas, donc (d) et (d') sont sécantes. Soit $M(x;y)$ leur point d'intersection. On a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (d) \cap (d') &\iff \begin{cases} y = -2x+4 \\ x = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2 \times 2 + 4 \\ x = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $M(2;0)$.

5 (d) et (d') sont toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées, donc elles sont parallèles.

6 (d) est parallèle à l'axe des ordonnées et (d') ne l'est pas, donc (d) et (d') sont sécantes. Soit $M(x;y)$ leur point d'intersection. On a :

$$M(x;y) \in (d) \cap (d') \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $M(3;0)$.

Exercice 24

Rappel - Multiplier ou diviser une équation par un nombre réel non nul la transforme en une équation équivalente.

On a :

- $(d_1) : -30x + 10y + 40 = 0$ donc $(d_1) : -3x + y + 4 = 0$ (en divisant par 10)
- $(d_2) : 10x - 4y - 2 = 0$ donc $(d_2) : 5x - 2y - 1 = 0$ (en divisant par 2)
- $(d_3) : 6x - 2y - 8 = 0$ donc $(d_3) : -3x + y + 4 = 0$ (en divisant par -2)
- $(d_4) : \dfrac{5}{2}x - y - \dfrac{1}{2} = 0$ donc $(d_4) : 5x - 2y - 1 = 0$ (en multipliant par 2)
- $(d_5) : -15x + 6y + 3 = 0$ donc $(d_5) : 5x - 2y - 1 = 0$ (en divisant par -3)
- $(d_6) : -x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{4}{3} = 0$ donc $(d_6) : -3x + y + 4 = 0$ (en multipliant par 3)

D'une part, les droites (d_1), (d_3), et (d_6) sont confondues (il s'agit de la même droite). D'autre part, les droites (d_2), (d_4), et (d_5) sont confondues.

Exercice 25

1 Il faut tester si les coordonnées de A et de B vérifient l'équation de la droite :

- $4 \times 2 - 2 \times (-3) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15 \neq 0$ donc $A \notin (d_1)$.
- $4 \times 1 - 2 \times 0 + 1 = 4 - 0 + 1 = 5 \neq 0$ donc $B \notin (d_1)$.

- $-8 \times 2 + 6 \times (-3) + 3 = -16 - 18 + 3 = -31 \neq 0$ donc $A \notin (d_2)$.
- $-8 \times 1 + 6 \times 0 + 3 = -8 + 0 + 3 = -5 \neq 0$ donc $B \notin (d_2)$.

- $5 \times (-3) + 3 = -15 + 3 = -12 \neq 0$ donc $A \notin (d_3)$.
- $5 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3 \neq 0$ donc $B \notin (d_3)$.

- $-4 \times 2 + 4 = -8 + 4 = -4 \neq 0$ donc $A \notin (d_4)$.
- $-4 \times 1 + 4 = -4 + 4 = 0$ donc $B \in (d_4)$.

2 Il suffit de prendre $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b \\ a\end{pmatrix}$ pour répondre à la question. Si on le souhaite, on peut en proposer un autre plus simple ensuite en multipliant ou divisant les coordonnées du vecteur par le même nombre :

- $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2 \\ 4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1), donc $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1).
- $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-6 \\ 8\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2), donc $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}-3 \\ 4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2).
- $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-5 \\ 0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_3), donc $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_3).
- $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}0 \\ -4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_4), donc $\overrightarrow{v_4}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_4).

3 Il faut isoler le "y" s'il y en a un, ou isoler le "x" sinon. Pour diviser tout une expression par un nombre, on découpe au même dénominateur :

$$\frac{ax+b}{c} = \frac{ax}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$$

Ici, on a :

- $(d_1) : 4x - 2y + 1 = 0$ donc $(d_1) : -2y = -4x - 1$ donc $(d_1) : y = \dfrac{-4x-1}{-2}$ donc $(d_1) : y = \dfrac{-4x}{-2} - \dfrac{1}{-2}$ donc $(d_1) : y = \dfrac{-4}{-2}x + \dfrac{1}{2}$ donc $(d_1) : y = 2x + \dfrac{1}{2}$.

- (d_2) : $-8x+6y+3=0$ donc (d_2) : $6y=8x-3$ donc (d_2) : $y=\dfrac{8x-3}{6}$ donc (d_2) : $y=\dfrac{8x}{6}-\dfrac{3}{6}$ donc (d_2) : $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{2}$.
- (d_3) : $5y+3=0$ donc (d_3) : $5y=-3$ donc (d_3) : $y=-\dfrac{3}{5}$.
- (d_4) : $-4x+4=0$ donc (d_4) : $-4x=-4$ donc (d_4) : $x=\dfrac{-4}{-4}$ donc (d_4) : $x=1$.

4 On injecte les coordonnées de $C(2;m)$ dans une équation de la droite (cartésienne ou réduite), et on résout l'équation obtenue. On le fait ici avec l'équation de départ.

- On résout :

$$C(2;m)\in(d_1) \iff 4\times2-2m+1=0 \iff -2m+9=0 \iff -2m=-9 \iff m=\frac{-9}{-2} \iff m=\frac{9}{2}$$

Donc $m=\dfrac{9}{2}$.

- On résout :

$$C(2;m)\in(d_2) \iff -8\times2+6m+3=0 \iff 6m-13=0 \iff 6m=13 \iff m=\frac{13}{6}$$

Donc $m=\dfrac{13}{6}$.

- On résout :

$$C(2;m)\in(d_3) \iff 5m+3=0 \iff 5m=-3 \iff m=-\frac{3}{5}$$

Donc $m=-\dfrac{3}{5}$.

- On résout :

$$C(2;m)\in(d_4) \iff -4\times2+4=0 \iff \underbrace{-4=0}_{\text{Impossible}}$$

Un tel nombre m n'existe pas.

Remarque - On peut aussi s'en rendre compte à l'aide de l'équation réduite. Puisque (d_4) : $x=1$, (d_4) est une droite parallèle à l'axe des ordonnées d'abscisse 1. Donc quelle que soit la valeur de m, $C(2;m)\notin(d_4)$.

Exercice 26

Remarque - La méthode est toujours la même : un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ (le plus simple possible) donne une équation de la forme $ax+by+c=0$ (attention à la rédaction). Avec un point sur la droite, on déterminer la valeur de c (en raisonnant par équivalences).

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1), donc il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : (d_1) : $-5x-2y+c=0$.

De plus :

$$\begin{aligned}A(5;-3)\in(d_1) &\iff -5\times5-2\times(-3)+c=0\\ &\iff -25+6+c=0\\ &\iff -19+c=0\\ &\iff c=19\end{aligned}$$

Donc (d_1) : $-5x-2y+19=0$, soit encore (d_1) : $5x+2y-19=0$.

2 $\vec{v}\begin{pmatrix}-30\\20\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2), donc $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de (d_2). Donc il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : (d_2) : $2x+3y+c=0$.

De plus :

$$\begin{aligned}B(-1;0)\in(d_2) &\iff 2\times(-1)+3\times0+c=0\\ &\iff -2+0+c=0\\ &\iff -2+c=0\\ &\iff c=2\end{aligned}$$

Donc (d_2) : $2x+3y+2=0$.

Remarque - Si l'on garde le vecteur directeur initial, on peut simplifier à la fin par 10 pour obtenir la même équation. Mais les calculs intermédiaires sont plus compliqués.

3 $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2-3\\-2-4\end{pmatrix}$ càd $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), donc il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : (CD) : $-6x+y+c=0$.

De plus :

$$\begin{aligned}C(3;4)\in(CD) &\iff -6\times3+4+c=0\\ &\iff -18+4+c=0\\ &\iff -14+c=0\\ &\iff c=14\end{aligned}$$

Donc (CD) : $-6x+y+14=0$.

Remarque - La réponse "(CD) : $6x-y-14=0$" est tout aussi acceptable (si l'on ne veut pas commencer par un coefficient négatif.

4 $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0-(-3)\\-1-2\end{pmatrix}$ càd $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (EF). Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de (EF). Donc il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : (EF) : $-x-y+c=0$.

De plus :

$$\begin{aligned}F(0;-1)\in(EF) &\iff -0-(-1)+c=0\\ &\iff 1+c=0\\ &\iff c=-1\end{aligned}$$

Donc (EF) : $-x-y-1=0$, soit encore (EF) : $x+y+1=0$

5 On utilise le fait que deux droites parallèles ont les mêmes vecteurs directeurs.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d') donc de (d). Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $(d) : x+y+c=0$.

De plus :

$$\begin{aligned} G(1;1) \in (d) &\iff 1+1+c=0 \\ &\iff 2+c=0 \\ &\iff c=-2 \end{aligned}$$

Donc $(d) : x+y-2=0$.

6 $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ') donc de (Δ). Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $(\Delta) : -5x-y+c=0$.

De plus :

$$\begin{aligned} H(-3;-1) \in (\Delta) &\iff -5\times(-3)-(-1)+c=0 \\ &\iff 15+1+c=0 \\ &\iff 16+c=0 \\ &\iff c=-16 \end{aligned}$$

Donc $(\Delta) : -5x-y-16=0$, soit encore $(\Delta) : 5x+y+16=0$.

Exercice 27

1 $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d'). On a :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix}3 & -2\\ -6 & 4\end{vmatrix} = 3\times 4-(-6)\times(-2) = 12-12=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, donc les droites (d) et (d') sont parallèles.

2 $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d'). On a :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{vmatrix} = 2\times(-1)-3\times(-4) = -2+12=10\neq 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (d) et (d') sont sécantes. Soit $M(x;y)$ leur point d'intersection. On a :

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in(d)\cap(d') &\iff \begin{cases}3x-2y+5=0\\ -x+4y+3=0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}3x-2y+5=0\\ 3(-x+4y+3)=0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}3x-2y+5=0 & L_1\\ -3x+12y+9=0 & L_2\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}10y+14=0 & L_1+L_2\\ 3x-2y+5=0 & L_1\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}10y=-14\\ 3x-2y+5=0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}y=\dfrac{-14}{10}\\ 3x-2y+5=0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}y=-\dfrac{7}{5}\\ 3x-2\times\left(-\dfrac{7}{5}\right)+5=0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}y=-\dfrac{7}{5}\\ 3x+\dfrac{14}{5}+\dfrac{25}{5}=0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}y=-\dfrac{7}{5}\\ 3x=-\dfrac{39}{5}\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}y=-\dfrac{7}{5}\\ x=-\dfrac{39}{5}\times\dfrac{1}{3}\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}y=-\dfrac{7}{5}\\ x=-\dfrac{13}{5}\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $M\left(-\dfrac{7}{5};-\dfrac{13}{5}\right)$.

Exercice 28

1 La somme des probabilités des issues est égale à 1, de sorte que $0.45+0.25+0.15+0.1+a=1$, càd que $0.95+a=1$, donc $a=1-0.95=0.05$. On a donc :

Nombre de voitures électriques exposées	0	1	2	3	4
Probabilité	0.45	0.25	0.15	0.1	0.05

2 Les issues n'ont pas toutes la même probabilité (par exemple $P(\{0\}) \neq P(\{1\})$) donc on n'est pas en situation d'équiprobabilité.

3 $P(A)=P(\{0;2;4\})=0.45+0.15+0.05=0.65$.

4 $P(B)=P(\{2;3;4\})=0.15+0.1+0.05=0.3$.

5 $A\cap B$:"le nombre de voitures exposé est pair ET supérieur ou égal à 2".

$$P(A\cap B)=P(\{2;4\})=0.15+0.05=0.2$$

6 $A\cup B$:"le nombre de voitures exposé est pair OU supérieur ou égal à 2".

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.65+0.3-0.2=0.75$$

Remarque - On peut le vérifier avec le tableau :

$$P(A\cup B)=P(\{0;2;3;4\})=0+45+0.15+0.1+0.05=0.75$$

7 $\overline{B}$:"le nombre de voitures n'est pas supérieur ou égal à 2", soit encore :

$\overline{B}$:"le nombre de voitures est strictement inférieur à 2". On a :

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.3=0.7$$

8 $A\cap B\neq\emptyset$, donc les événements A et B ne sont pas incompatibles.

9 On a $E=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ (formules de De Morgan), donc :

$$P(E)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.75=0.25$$

Exercice 29

1 Ci-dessous le tableau complété :

	T	G	A	Total
O	30	170	100	300
$\overline{O}$	95	80	25	200
Total	125	250	125	500

Détail des calculs si besoin :

- $500\times\dfrac{1}{4}=125$ puis $125-30=95$
- $500\times\dfrac{60}{100}=500\times 0.6=300$, puis $500-300=200$, puis $300-30-170=100$
- Si x est le nombre d'élèves jouant d'un autre instrument, 80% de x correspond à 100. On résout :
$$\frac{80}{100}\times x=100 \iff 0.8x=100 \iff x=\frac{100}{0.8} \iff x=125$$
- $500-125-125=250$, puis $250-170=80$, puis $125-100=25$.

2 $P(G)=\dfrac{250}{500}=\dfrac{1}{2}=0.5$ et $P(G\cap O)=\dfrac{170}{500}=\dfrac{17}{50}=0.34$.

3 $G\cup O$:"l'élève joue de la guitare OU participe à un orchestre". On a :

$$P(G\cup O)=\frac{170+80+30+100}{500}=\frac{380}{500}=\frac{38}{50}=0.76$$

Remarque - On peut également utiliser la formule :

$$P(G\cup O)=P(G)+P(O)-P(G\cap O)=0.5+\frac{300}{500}-0.34=0.5+0.6-0.34=0.76$$

4 $\overline{T}$:"l'élève ne joue pas de la trompette". On a :

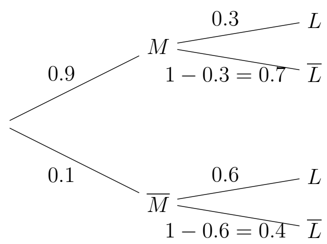
$$P(\overline{T})=1-P(T)=1-\frac{125}{500}=1-0.25=0.75$$

5 Parmi les 300 élèves concernés, il y en a 30 qui jouent de la trompette. Donc $p=\dfrac{30}{300}=0.1$.

Exercice 30

1 $P(M)=0.9$ et $P(\overline{M})=1-0.9=0.1$.

2 Ci-dessous l'arbre complété :



3 ***Rappel -*** Pour calculer un pourcentage de pourcentage (ou plus généralement une proportion de proportion), il faut faire le produit des pourcentages.

90% écoutent de la musique, et 30% d'entre eux lisent régulièrement, donc le pourcentage de personnes (sur tout le groupe) qui écoutent de la musique et qui lisent régulièrement vaut :

$$\frac{90}{100} \times \frac{30}{100} = 0.9 \times 0.3 = 0.27$$

Or $P(M \cap L)$ est la probabilité que quelqu'un choisi au hasard sur tout le groupe écoute de la musique et lise régulièrement. Donc $P(M \cap L) = 0.27$.

> ***Bilan -*** Pour calculer la probabilité d'une intersection depuis un arbre comme ci-dessus, on parcourt le chemin qui nous intéresse, puis on fait le produit des probabilités rencontrées.

4 Ici, on a :

$P(M \cap \overline{L}) = 0.9 \times 0.7 = 0.63$ $\quad$ $P(\overline{M} \cap L) = 0.1 \times 0.6 = 0.06$ $\quad$ $P(\overline{M} \cap \overline{L}) = 0.1 \times 0.4 = 0.04$

Exercice 31

1 On calcule la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{3 \times 0 + 6 \times 1 + 11 \times 2 + 8 \times 3 + 2 \times 4}{3 + 6 + 11 + 8 + 2} = \frac{60}{30} = 2 \qquad \text{(heures)}$$

Il a passé en moyenne 2 heures par jour à faire ses devoirs.

2 On calcule la variance (càd la moyenne des carrés des écarts à la moyenne) :

$$V = \frac{3 \times (0-2)^2 + 6 \times (1-2)^2 + 11 \times (2-2)^2 + 8 \times (3-2)^2 + 2 \times (4-2)^2}{3 + 6 + 11 + 8 + 2} = \frac{34}{30} = \frac{17}{15}$$

On en déduit l'écart-type de la série (en prenant la racine carrée de la variance) :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{17}{15}} \simeq 1.06 \qquad \text{(heures)}$$

3 La moyenne en octobre est moins élevée, donc il a moins travaillé en octobre (en moyenne). L'écart-type en octobre est plus petit, donc les durées de ses séances de travail sont plus homogènes (= moins dispersées) autour de la moyenne. Donc c'est en octobre qu'il davantage réussi à répartir son travail à la maison.

Exercice 32

1 $5.52 \times \left(1 + \frac{25}{100}\right) = 5.52 \times 1.25 = 6.9$ $\qquad$ Après la hausse, il coûte 6.90 euros.

2 $6.4 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 6.4 \times 0.85 = 5.44$ $\qquad$ Après la baisse, il coûte 5.44 euros.

3 Notons x son prix initial en euros. On résout :

$$x \times \left(1 + \frac{50}{100}\right) = 1.77 \iff x \times 1.5 = 1.77 \iff x = \frac{1.77}{1.5} \iff x = 1.18$$

Initialement, il coûtait 1.18 euro.

4 Le taux d'évolution est de $\frac{1.12 - 1.4}{1.4} = -0.2 = -20\%$. Cela correspond à une baisse de 20%.

Exercice 33

1 On ne peut pas ajouter les pourcentages pour les cumuler. Il faut multiplier les coefficients multiplicateurs entre eux :

$$125 \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 125 \times 0.96 \times 0.96 = 125 \times 0.96^2 = 115.2$$

Après deux baisses de 4% successives, càd en 2021, le prix est de 115.2 euros.

Le CM vaut $0.96^2 = 0.9216$, donc le taux d'évolution global vaut $0.9216 - 1 = -0.0784 = -7.84\%$.

2 À chaque baisse supplémentaire de 4%, il faut multiplier par $1 - \frac{4}{100} = 0.96$:

- En 2020, le prix est de $P \times 0.96$ (après 1 baisse de 4%).
- En 2021, le prix est de $P \times 0.96 \times 0.96 = P \times 0.96^2$ (après 2 baisses successives de 4%).
- En 2022, le prix est de $P \times 0.96 \times 0.96 \times 0.96 = P \times 0.96^3$ (après 3 baisses successives de 4%).
- En 2030, le prix est de $P \times 0.96^{11}$ (après 11 baisses successives de 4%).
- Après n années, le prix est de $P \times 0.96^n$ (après n baisses successives de 4%).

3 Après une baisse de 4%, le CM vaut $1 - \frac{4}{100} = 0.96$, donc le CM réciproque vaut $\frac{1}{0.96} \simeq 1.042$.

Donc le taux d'évolution réciproque est d'environ $1.042 - 1 = 0.042 = +4.2\%$.

Il faut donc appliquer une hausse de 4.2% environ pour revenir au prix initial.

Exercice 34

1 Ci-dessous le tableau complété :

x	a	b	y
2	2	3	13
-2	-10	7	149

Remarque - Le détail des calculs si besoin :

- Pour $x=2$, $a=3\times 2-4=6-4=2$, puis $b=-2+5=3$, puis $y=2^2+3^2=4+9=13$.
- Pour $x=-2$, $a=3\times(-2)-4=-6-4=-10$, puis $b=-(-2)+5=7$, puis $y=(-10)^2+7^2=100+49=149$.

2 Si x est la valeur entrée dans l'algorithme, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ &= a^2+b^2 \\ &= (3x-4)^2+(-x+5)^2 \\ &= 9x^2-24x+16+x^2-10x+25 \\ &= 10x^2-34x+41 \end{aligned}$$

3 Ci-dessous un script Python traduisant cet algorithme :

```
x=float(input("x="))
a=3*x-4
b=-x+5
y=a**2+b**2
print(y)
```

Exercice 35

1 Ci-dessous la fonction complétée. Attention à bien conserver l'indentation (le décalage à droite).

```
def prixtotal(A,B) :
    P=1.1*A+1.2*B
    return(P)
```

2 La console va afficher la valeur $1.1\times 3+1.2\times 2=5.7$. C'est le prix pour 3 pains au chocolat et 2 croissants.

3 Ci-dessous la fonction modifiée pour une autre boulangerie :

```
def prixtotal(A,B) :
    P=1.3*A+1.05*B
    return(P)
```

4 Si l'on veut pouvoir choisir à chaque fois le prix x du pain au chocolat et celui y du croissant, il suffit de rajouter deux arguments x et y à la fonction :

```
def prixtotal(A,B,x,y) :
    P=x*A+y*B
    return(P)
```

Exercice 36

1 La longueur de l'hypoténuse est la racine carrée de la somme des carrés des deux autres côtés (théorème de Pythagore). La commande racine carrée "sqrt" (square root) peut être utilisée dès lors que l'on charge le package "math". On rappelle également qu'en Python, l'expression a^n s'écrit "**a**n**".

```
from math import *
def hypotenuse(x,y) :
    L=sqrt(x**2+y**2)
    return(L)
```

2 Il suffit de saisir la commande "**hypotenuse(3,4)**" (ou la commande "**hypotenuse(4,3)**").

Exercice 37

La fonction Python ci-dessous fonctionne comme la fonction mathématique initiale : on rentre un nombre x, la fonction f est le processus de calcul qui nous renvoie l'image $f(x)$.

```
def f(x) :
    y=5*x**2-3*x+4
    return(y)
```

Exercice 38

1 Si $x=2$, alors le test "$x\geq 1$" est vrai, donc on applique la ligne du "Alors". Donc $A=2x-5=2\times 2-5=4-5=-1$. L'algorithme affiche A, càd -1.

Si $x=-4$, alors le test "$x\geq 1$" est faux, donc on applique la ligne du "Sinon". Donc $A=-3x=-3\times(-4)=12$. L'algorithme affiche A, càd 12.

2 En Python, pas de "alors" (seulement les deux points). Attention à l'indentation.

```
x=float(input("x="))
if x>=1 :
    A=2*x-5
else :
    A=-3*x
print(A)
```

Exercice 39

1 La valeur absolue d'un nombre est soit égale à ce nombre (s'il est positif) soit à son opposé (s'il est négatif).

```
def valeurabsolue(x) :
    if x>=0 :
        return(x)
    else :
        return(-x)
```

2 Il faut tester si le déterminant de ces vecteurs est nul ou non. Attention : dans un test en Python, un = se note "==" (le signe égal simple étant réservé à l'affectation de variables).

```
def colinearite(x1,y1,x2,y2) :
    D=x1*y2-y1*x2 :
    if D==0 :
        return("vecteurs colinéaires")
    else :
        return("vecteurs non colinéaires")
```

Exercice 40

Une proposition de solution (ce n'est pas la seule) :

```
def note(N) :
    if N<8 :
        return("candidat refusé")
    elif N<10 :
        return("candidat admis au rattrapage")
    elif N<12 :
        return("candidat admis sans mention")
    elif N<14 :
        return("candidat admis mention AB")
    elif N<16 :
        return("candidat admis mention B")
    else :
        return("candidat admis mention TB")
```